

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Prima prova di valutazione intermedia
6 aprile 2009

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Trovare, al variare del parametro λ ($0 \leq \lambda \leq 4$), le soluzioni del seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} \lambda X + 3Y \equiv 1 \pmod{5} \\ 2X - \lambda Y \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

2. Quali tra le seguenti funzioni aritmetiche sono moltiplicative? Quali totalmente moltiplicative? Motivare le risposte.

(a) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato perfetto;} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$;

(b) $f(n) = n^3$;

(c) $f(n) = |\{p \text{ primo} \mid p|n\}|$;

(d) $f(n) = n - 1$.

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

3. Determinare il più piccolo intero positivo soluzione del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 5 \pmod{8} \\ 2X \equiv 3 \pmod{9} \\ 7X \equiv 6 \pmod{13} \\ 4X \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

4. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della seguente congruenza polinomiale:

$$f(X) = X^{12} + 3X^{10} + 4X^7 + X + 1 \equiv 0 \pmod{225}$$

5. (a) Trovare tutte le radici primitive modulo 18.
- (b) Risolvere le seguenti congruenze:
- i. $X^{10} \equiv 13 \pmod{18}$;
 - ii. $13X^{15} \equiv 5 \pmod{18}$;
 - iii. $7^X \equiv 13 \pmod{18}$.

6. Sia p un numero primo dispari; sia a un numero intero primo con p tale che $\text{ord}_p a = 3$. Provare che:

- (a) p non divide $1 + a$;
- (b) $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$;
- (c) $\text{ord}_p(1 + a) = 6$.