Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 8 (21 maggio 2007)
Micaela De Santis

1. Con la tecnica delle sostituzioni successive di $y = 1, 2, \cdots$ in $dY^2 + 1$, determinare la più piccola soluzione positiva di $X^2 - dY^2 = 1$ quando d è 7, 11, 18, 30, 39.

2. Dimostrare che esistono infiniti numeri interi pari n tali che $n + 1$ e $\frac{n}{2} + 1$ sono quadrati perfetti. Trovarne almeno 2.

3. Provare che se d è divisibile per un numero primo $p \equiv 3 \pmod 4$, allora l'equazione $X^2 - dY^2 = -1$ non ha soluzioni.

4. Sia d un intero positivo che non è un quadrato. Si supponga che l'equazione diofantea
$$X^2 - dY^2 = -1$$
abbia almeno una soluzione. Provare che:
   (a) Esiste sempre una soluzione positiva (u_1, v_1) di $X^2 - dY^2 = -1$ tale che $\gamma_1 := u_1 + \sqrt{d}v_1 > 1$ è minimo. Tale soluzione è detta *soluzione fondamentale*.
   (b) Se (w_1, z_1) e (w_2, z_2) sono due soluzioni di $X^2 - dY^2 = -1$, allora $(w_3 := w_1w_2 + dz_1z_2, z_3 := w_1z_2 + w_2z_1)$ è una soluzione dell'equazione di Pell $X^2 - dY^2 = 1$.
   (c) Se $\epsilon_1 = \gamma_1^2 = u_2 + \sqrt{d}v_2$, allora (u_2, v_2) è la soluzione fondamentale dell'equazione di Pell $X^2 - dY^2 = 1$.
   (d) Tutte e sole le soluzioni di $X^2 - dY^2 = -1$ sono date da $(\pm u_{2n+1}, \pm v_{2n+1})$ con $n \geqslant 0$ e per ogni possibile scelta del segno.

5. Sapendo che $x_1 = 15,\ y_1 = 2$ è la soluzione fondamentale di $X^2 - 56Y^2 = 1$, determinare altre due soluzioni positive.

6. (a) Sia d un intero positivo che non è un quadrato. Provare che se l'equazione $X^2 - dY^2 = c$ è risolubile, allora ha infinite soluzioni. (Sugg. : Se u, v sono tali che $u^2 - dv^2 = c$ e r, s sono tali che $r^2 - ds^2 = 1$, allora
$$(ur \pm dvs)^2 - d(us \pm vr)^2 = (u^2 - dv^2)(r^2 - ds^2) = c.$$
   (b) Sapendo che $x = 16$, $y = 6$ è una soluzione di $X^2 - 7Y^2 = 4$, trovare altre due soluzioni positive.
   (c) Sapendo che $x = 18$, $y = 3$ è una soluzione di $X^2 - 35Y^2 = 9$, trovare altre due soluzioni positive.