

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 6 (9 maggio 2007)
Micaela De Santis

1. Trovare il valore dei seguenti simboli di Jacobi:

$$\left(\frac{5}{21}\right), \left(\frac{27}{101}\right), \left(\frac{111}{1001}\right),$$
$$\left(\frac{1009}{2307}\right), \left(\frac{2663}{3299}\right), \left(\frac{10001}{20003}\right).$$

2. Sia n un intero positivo dispari privo di fattori quadratici. Dimostrare che esiste un intero a tale che $\text{MCD}(a, n) = 1$ e $\left(\frac{a}{n}\right) = -1$.
3. Trovare tutti i triangoli pitagorici le cui aree sono uguali al loro perimetro.
4. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva in cui x, z sono interi positivi consecutivi, allora

$$x = 2t(t + 1), \quad y = 2t + 1, \quad z = 2t(t + 1) + 1$$

per qualche $t > 0$.

5. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva in cui $z - y = 2$, allora

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 + 1$$

per qualche $t > 0$.

6. Provare che l'equazione $X^4 - Y^4 = 2Z^2$ non ha soluzioni negli interi positivi.
7. Provare che l'equazione $X^4 - 4Y^4 = Z^2$ non ha soluzioni negli interi positivi.
8. Provare che non esistono triangoli pitagorici la cui area è due volte l'area di un quadrato con lato intero.