

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008**  
**TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri**  
**Tutorato 5 (4 aprile 2007)**  
**Micaela De Santis**

1. Trovare il valore dei seguenti simboli di Legendre:

$$\left(\frac{4376}{593}\right), \left(\frac{8177}{107}\right), \left(\frac{6}{31}\right).$$

2. Provare che:

- (a) se  $p$  e  $q = 2p + 1$  sono entrambi numeri primi dispari, allora  $-4$  è una radice primitiva di  $q$ ;
- (b) se  $p \equiv 1 \pmod{4}$  è un numero primo, allora  $-4$  e  $\frac{p-1}{4}$  sono entrambi residui quadratici di  $p$ ;
- (c) se  $p \equiv 7 \pmod{8}$  è un numero primo, allora  $p$  divide  $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ .

3. Risolvere le congruenze:

- (a)  $X^2 \equiv 31 \pmod{11^4}$ ;
- (b)  $X^2 + 5X + 6 \equiv 0 \pmod{5^3}$ ;
- (c)  $X^2 + X + 3 \equiv 0 \pmod{3^3}$

4. Risolvere le congruenze:

- (a)  $X^2 \equiv 33 \pmod{2^6}$ ;
- (b)  $X^2 \equiv 17 \pmod{2^5}$ ;

5. Risolvere le congruenze:

- (a)  $X^2 \equiv 49 \pmod{144}$ ;
- (b)  $X^2 \equiv 25 \pmod{168}$ .

6. (a) Determinare per quali valori del parametro  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq 10$  la seguente congruenza

$$3X^2 + X + \lambda \equiv 0 \pmod{11}$$

è risolubile.

- (b) Per ogni valore di  $\lambda$  per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.