Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Prova di esame - Appello B
24 giugno 2008

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri l'equazione diofantea:

$$4(\lambda - 5)X + 125Y = 60.$$

   (a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione è risolubile.

   (b) Determinare esplicitamente le soluzioni dell'equazione data per $\lambda = 31$, utilizzando le frazioni continuate finite semplici..

2. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^4 + 33X^3 + 28X^2 + 63X + 36 \equiv 0 \pmod{441}.$$

3. Sapendo che 2 è una radice primitiva (mod 29)

   (a) trovare tutte le radici primitive (mod 29);

   (b) trovare le (eventuali) soluzioni della congruenza

   $$9X^{15} \equiv 22 \pmod{29};$$

   (c) trovare le (eventuali) soluzioni della congruenza

   $$7^X \equiv 25 \pmod{29}.$$

4. Siano p un numero primo dispari ed a un intero tale che $\mathrm{MCD}(a, p) = 1$. Provare che $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ se e solo se 2 nella decomposizione in fattori primi di $\mathrm{ord}_p(a)$ e di $p - 1$ ha lo stesso esponente.

5. Sia p un numero primo $\equiv 1$ o $7 \pmod 8$.

   (a) Provare che l'equazione $X^2 - 2Y^2 = -p$ ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.
   (Sugg.: si utilizzi il lemma di Thue)

   (b) Utilizzando il punto precedente ed il fatto che $-1 = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$, provare che l'equazione $X^2 - 2Y^2 = p$ ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

6. Sia $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione aritmetica definita da:

$$\psi(n) = \left(\frac{n}{59}\right) \sigma(n).$$

(a) Stabilire se ψ è moltiplicativa.

(b) Sia $F = \psi * \tau$. Calcolare $F(97)$ e $F^{-1}(97)$.

(c) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(97)$.