**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008**
**TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri**
**Prima prova di valutazione intermedia**
**11 aprile 2008**

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

**Avvertenza:** Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Un numero naturale $n > 1$ si dice <u>*perfetto*</u> se $\sigma(n) = 2n$, con

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Provare che:

(a) Se $2^s - 1$ con $s \in \mathbb{Z}$, $s > 1$ è primo, allora $s$ è primo (un numero primo di questa forma si dice primo di Mersenne).

(b) Se $2^s - 1$ con $s \in \mathbb{Z}$, $s > 1$ è primo, allora $n = 2^{s-1}(2^s - 1)$ è perfetto.

(c) (FAC) Se $n$ è un numero perfetto <u>*pari*</u>, allora $n$ è della forma $2^{s-1}(2^s - 1)$ con $s > 1$ e $2^s - 1$ primo.

2. Risolvere il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 2X + 3Y + 6Z \equiv -1 \pmod{7} \\ 2X - Y \equiv -3 \pmod{7} \end{cases}$$

3. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^4 + 15X^3 + 6X^2 + 10X + 3 \equiv 0 \pmod{75}.$$

4. (a) Determinare tutte le radici primitive (mod 19) e scrivere la tabella degli indici rispetto alla radice primitiva minima positiva (mod 19).

   (b) Determinare le (eventuali) soluzioni (mod 18) della congruenza $4^X \equiv 15 \pmod{19}$.

5. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle congruenze polinomiali:

   (a) $X^2 \equiv 58 \pmod{7 \cdot 11^2}$;

   (b) $X^2 \equiv 207 \pmod{8 \cdot 143}$.

6. Sia $n$ un numero intero positivo tale che $2n+1$ è primo. Dimostrare che se $n \equiv 0\ ,\ 3 \pmod 4$, allora $2n+1$ divide $2^n - 1$, mentre se $n \equiv 1\ ,\ 2 \pmod 4$, allora $2n+1$ divide $2^n + 1$.

   (Sugg. : si consideri il simbolo di Legendre $\left(\frac{2}{2n+1}\right)$).