Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato 2 (19 ottobre 2006)
Stefano Urbinati

1. Elencare le classi laterali destre e sinistre modulo il sottogruppo $H = \{id, (123), (132)\}$ di A_4.

2. Elencare le classi laterali destre e sinistre modulo il sottogruppo $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ di A_4.

3. (a) Provare che se G è un gruppo finito di ordine pari, allora G possiede almeno un elemento di ordine 2.
   (b) * Utilizzando il teorema di Lagrange, provare che se n è un numero naturale dispari, allora un gruppo abeliano di ordine $2n$ ha esattamente un solo elemento di ordine 2.

4. Stabilire se l'applicazione $x \mapsto 3x$ è un isomorfismo di:
   (a) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ in sé stesso;
   (b) $(\mathbb{Q}, +)$ in sé stesso.

5. Stabilire quali delle seguenti applicazioni definiscono un omomorfismo di $(\mathbb{C}*, \cdot)$ in sé stesso:
   (a) $z \longrightarrow \overline{z}$;
   (b) $z \longrightarrow iz$;
   (c) $z \longrightarrow z^2$;
   (d) $z \longrightarrow |z|$.

   Per ciascuno degli omomorfismi trovati determinare il nucleo e l'immagine.

6. Sia S l'insieme dei numeri reali $\neq -1$. Sia $*$ l'applicazione da $S \times S$ ad $\mathbb{R}$ definita da
$$a * b = a + b + ab$$
   con $a, b \in S$.
   (a) Provare che $*$ definisce una operazione binaria su S.
   (b) Provare che $(S, *)$ è un gruppo.
   (c) Trovare la soluzione dell'equazione $2 * x * 3 = 7$ in S.
   (d) Provare che $(S, *)$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli $\mathbb{R}^*$.

7. Si considerino il gruppo additivo dei numeri razionali $(\mathbb{Q}, +)$ ed il suo sottogruppo dei numeri interi $\mathbb{Z}$.
   (a) Provare che ogni elemento del gruppo quoziente $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ è di ordine finito.

(b) Provare che $\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{5}{8} + \mathbb{Z} \rangle = \langle \frac{1}{24} + \mathbb{Z} \rangle$.

(c) Provare che ogni sottogruppo finitamente generato di $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ è ciclico. (Suggerimento: usare l'induzione sul numero dei generatori.)

(d) Mostrare che, per ogni numero naturale $n \geq 1$, esiste uno ed un solo sottogruppo H di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ di ordine uguale ad n .

8. Stabilire se i gruppi $(U(\mathbb{Z}_{20}), \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_8, +)$ sono isomorfi.

9. Sia $GL_2(\mathbb{R})$ il gruppo lineare generale reale di ordine 2.

   (a) Determinare il centro di $GL_2(\mathbb{R})$.

   (b) Verificare che

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad | \quad a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\}$$

   e

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad b \in \mathbb{R} \right\}$$

   sono sottogruppi di $GL_2(\mathbb{R})$.

   (c) Verificare che H non è normale in $GL_2(\mathbb{R})$.

   (d) Provare che N è normale in H e che il gruppo H/N è abeliano.

   (e) Provare che il gruppo H/N è isomorfo ad un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$.

10. Si consideri l'insieme $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad a \in U(\mathbb{Z}_8),\ 0, 1, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$.

   (a) Provare che G rispetto al prodotto righe per colonne è un gruppo non abeliano.

   (b) Sia $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad x \in \{1, 7\},\ y \in \langle 2 \rangle \right\}$. Provare che N è un sottogruppo normale di G.

   (c) Trovare l'ordine di G e l'ordine di N.

   (d) Studiare il gruppo quoziente G/N.

11. (a) Provare che per ogni $n \geq 3$ ogni elemento di A_n si può scrivere come prodotto di 3-cicli (cicli di lunghezza 3).

   (b) Calcolare il numero delle classi coniugate di S_6 e per ciascuna classe coniugata scrivere esplicitamente un rappresentante.

   (c) Trovare un elemento $\tau \in S_6$ tale che

$$\tau(154)(23)\tau^{-1} = (12)(635).$$

   (d) Determinare le classi coniugate di A_4.

   (e) Provare che $(123)(456)$ e $(531)(264)$ sono coniugate in A_8.

   (f) Provare che $(12345)(678)$ e $(43786)(215)$ non sono coniugate in A_8.