

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Prima prova di valutazione intermedia
9 novembre 2006

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte.**

1. (1 pt+2 pt+2 pt+2 pt=7 pt)

- (a) Dire quanti sono i generatori di \mathbb{Z}_{36} .
- (b) Descrivere i sottogruppi di \mathbb{Z}_{48} e rappresentarli attraverso un diagramma di Hasse.
- (c) Determinare la struttura di $Aut(\mathbb{Z}_{12})$.
- (d) Dire quanti sono gli omomorfismi suriettivi da \mathbb{Z}_{60} a \mathbb{Z}_{15} e descriverne esplicitamente uno.

2. (2 pt+4 pt+2 pt+1 pt=9 pt)

Si consideri il seguente sottogruppo del gruppo $GL_3(\mathbb{Z})$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid b \in 51\mathbb{Z} \right\}.$$

- (a) Verificare che H è un sottogruppo normale di G .
- (b) Determinare a quale gruppo noto è isomorfo il quoziente G/H .
- (c) Siano G_1, G_2, H_1, H_2 gruppi e $\phi : G_1 \rightarrow G_2$, $\psi : H_1 \rightarrow H_2$ due isomorfismi. Determinare una corrispondenza biunivoca tra $Hom(G_1, H_1)$ e $Hom(G_2, H_2)$.
- (d) Dire quanti sono gli omomorfismi da G/H a \mathbb{Z}_{36} .

3. (1 pt+1 pt+2 pt+4 pt=8 pt)

Sia G un gruppo.

- (a) Provare che per ogni elemento a di G si ha che l'ordine di a è uguale all'ordine di a^{-1} .
- (b) Provare che se $a, b \in G$, allora a e bab^{-1} hanno lo stesso ordine.
- (c) Provare che se $a, b \in G$, allora ab e ba hanno lo stesso ordine.
- (d) Provare che se G ha un solo elemento a di ordine n con $n > 1$, allora $a \in Z(G)$ ed $n = 2$.

4. (1 pt+1 pt+2 pt+2 pt=6 pt)

Sia G un gruppo *abeliano*.

- (a) Provare che gli elementi di ordine finito di G formano un sottogruppo di G che è detto *il sottogruppo di torsione* di G .
- (b) Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo moltiplicativo \mathbb{R}^* dei numeri reali non nulli.
- (c) Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo moltiplicativo \mathbb{C}^* dei numeri complessi non nulli.
- (d) Trovare il sottogruppo di torsione del gruppo $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}$.