Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2006/2007
AL2 - Algebra 2
Esercitazione 2
Giovedì 12 Ottobre 2006

1. Elencare gli elementi di S_3 come $id, (12), (23), (13), (123), (132)$ ed etichettarli, nell'ordine, con $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Determinare l'immagine di ogni elemento di S_3 in S_6 tramite l'omomorfismo ϕ del teorema di Cayley.

   $\phi(id) = id \in S_6$; $\phi((12)) = (12)(35)(46)$; $\phi((123)) = (156)(243)$. Allora $\phi((132)) = \phi((123))^{-1} = (651)(342)$, $\phi((13)) = \phi((123)(12)) = \phi((123))\phi((12)) = (14)(25)(36)$, $\phi((23)) = \phi((12))\phi((123)) = (13)(26)(45)$.

2. Si immerga $\mathbb{Z}_p$ in un opportuno S_n tramite l'omomorfismo ϕ del teorema di Cayley. Determinare la struttura ciclica degli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ e dire quali tra gli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ sono coniugati in:

   a) $\phi(\mathbb{Z}_p)$
   b) S_n

   Useremo due fatti noti: (*) l'ordine di un elemento si conserva per isomorfismo e (**) l'ordine di una permutazione $\sigma \in S_n$ è il mcm delle lunghezze dei cicli della scrittura di σ in cicli disgiunti.

   Chiaramente $n = p = |\mathbb{Z}_p|$. $\phi([0]) = id$ dato che ϕ è un omomorfismo di gruppi. Ogni altro elemento di $\mathbb{Z}_p$ all'infuori dell'elemento neutro $[0]$ ha ordine p per il teorema di Lagrange. Quindi, per (*), si ha che ogni $[a] \in \mathbb{Z}_p$ ha $ord(\phi([a])) = p$. Perciò, per (**), $\phi([a])$ è un p-ciclo.

   (a) $\mathbb{Z}_p$ è un gruppo abeliano, quindi anche $\phi(\mathbb{Z}_p)$ è un sottogruppo abeliano di S_n. Perciò gli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ sono coniugati solo con se stessi in $\phi(\mathbb{Z}_p)$.

   (b) Per quanto visto durante la scorsa esercitazione, in S_p tutti i p-cicli sono coniugati.

3. Sia G un gruppo e sia $\phi : G \to G$ l'applicazione che manda ogni elemento nel suo inverso. Dimostrare che ϕ è un'applicazione biiettiva e che ϕ è un automorfismo se, e solo se, G è abeliano.

   ϕ è un'applicazione iniettiva, infatti: $\forall x, y \in G$, $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$. ϕ è anche suriettiva, infatti: per ogni $x \in G$, $\phi(x^{-1}) = x$.

   ϕ automorfismo $\Leftrightarrow \forall x, y \in G,\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \Leftrightarrow \forall x, y \in G,\ y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow \forall x, y \in G,\ xy = yx \Leftrightarrow G$ abeliano.

4. Siano G_1, G_2 gruppi e $\phi : G_1 \to G_2$ applicazione. Verificare se nei casi seguenti ϕ è un omomorfismo ed in caso affermativo determinarne il nucleo e l'immagine:

   (a) $G_1 = (\mathbb{R}^*, \cdot)$; $G_2 = (\mathbb{R}^*, \cdot)$; $\forall x \in G_1,\ \phi(x) = x^2$

(b) $G_1 = (\mathbb{R}^*, \cdot)$; $G_2 = (\mathbb{R}^*, \cdot)$; $\forall x \in G_1,\ \phi(x) = 2^x$

(c) $G_1 = (\mathbb{R}, +)$; $G_2 = (\mathbb{R}, +)$; $\forall x \in G_1,\ \phi(x) = x + 1$

(d) $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$; $G_2 = (\mathbb{R}^*, \cdot)$; $\forall x \in G_1,\ \phi(x) = |x|$

(a) Per ogni $x, y \in G_1$ $\phi(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = \phi(x)\phi(y)$, perciò ϕ è un omomorfismo. $\ker \phi = \{1, -1\}$, $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}_{>0}$.

(b) ϕ non è un omomorfismo dato che l'elemento neutro di G_1 non viene mandato nell'elemento neutro di G_2: $\phi(1) = 2$.

(c) Come sopra: $\phi(0) = 1$.

(d) Per ogni $x, y \in G_1$ $\phi(xy) = |xy| = |x||y| = \phi(x)\phi(y)$, perciò ϕ è un omomorfismo. $\ker \phi = \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ |z| = 1\}$, $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}_{>0}$.

5. Sia G un gruppo finito. Sia $\phi : G \to G$ endomorfismo t.c. più della metà degli elementi di G vengono mandati in e elemento neutro. Dimostrare che ϕ manda tutti gli elementi in e.

   $|G| \geq |\ker \phi| > |G|/2$. Inoltre, per Lagrange, $|\ker \phi| \Big| |G|$. L'unica possibilità è $|\ker \phi| = |G|$, cioé $\ker \phi = G$, ovvero ϕ manda tutti gli elementi in e.

6. Siano $K \trianglelefteq J \leq G$ gruppi. Sia H gruppo e supponiamo esista $\phi : G \to H$ omomorfismo. Sia $\overline{K} = \phi(K), \overline{J} = \phi(J)$. Dimostrare che $\overline{K} \trianglelefteq \bar{J} \leq H$.

   Sia $j \in J$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\phi(j) \in \overline{J}$ si ha $\phi(j)\overline{K}\phi(j)^{-1} \subseteq \overline{K}$. Sia $\phi(k) \in \overline{K}$: $\phi(j)\phi(k)\phi(j)^{-1} = \phi(jkj^{-1})$. Dato che $K \trianglelefteq J$ $jkj^{-1} \in K$ e perciò $\phi(jkj^{-1}) \in \phi(K) = \overline{K}$.

7. Siano N, M, G gruppi t.c. $N, M \trianglelefteq G$ e $N \cap M = e$. Dimostrare che per ogni $n \in N, m \in M$ si ha $nm = mn$.

   Consideriamo $m^{-1}nmn^{-1}$. Dato che M è normale in G, $nmn^{-1} \in M$ e quindi $m^{-1}(nmn^{-1}) \in M$. Analogamente, dato che anche N è normale in G, $m^{-1}nm \in N$ e quindi $(m^{-1}nm)n^{-1} \in N$. Perciò $m^{-1}nmn^{-1} \in N \cap M \Rightarrow m^{-1}nmn^{-1} = e \Rightarrow nm = mn$.

8. Siano H, K, G gruppi. Quali tra le seguenti affermazioni sono vere? Dare una dimostrazione o fornire un controesempio:

   (a) $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G \Rightarrow H \trianglelefteq G$

   (b) $K \leq G, H \trianglelefteq G, H \leq K \Rightarrow H \trianglelefteq K$

   (c) $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G \Rightarrow H \cap K \trianglelefteq G$

   (a) Falsa. Un possibile controesempio: sia $G = D_4$ gruppo diedrale con otto elementi, $H = \langle \sigma \rangle$, $K = \{1, \sigma, \rho^2\sigma, \rho^2\}$. $H \trianglelefteq K$ perché l'indice di H in K, $[K : H]$, è uguale a 2. Analogamente $K \trianglelefteq G$. Ma $H \ntrianglelefteq G$ dato che $\rho\sigma\rho^{-1} = \rho^2\sigma \notin H$.

   (b) Vera. Per ipotesi $k \in K \Rightarrow k \in G$. Quindi, data l'ipotesi $H \trianglelefteq G$, si ha che per ogni $k \in K$, $kHk^{-1} = H$.

(c) Vera. Sia $g \in G$ e sia $x \in H \cap K$. Allora $gxg^{-1} \in H$ e $gxg^{-1} \in K$ per le rispettive normalità di H e K in G. Perciò $gxg^{-1} \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \trianglelefteq G$.

9. Tra le seguenti coppie di gruppi quali sono isomorfi e quali no?

   (a) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$
   (b) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$
   (c) $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$
   (d) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
   (e) $\mathbb{Z}_8$, D_4

   (a) Non sono isomorfi: nel primo gruppo -1 ha ordine 2, mentre nel secondo gruppo nessun elemento è periodico.
   (b) Non sono isomorfi: $(\mathbb{Z}, +)$ è ciclico, mentre $(\mathbb{Q}, +)$ non lo è.
   (c) Non sono isomorfi: gli insiemi hanno cardinalità diverse.
   (d) Sono isomorfi tramite l'isomorfismo $\phi(x) = e^x$
   (e) Non sono isomorfi: il primo è abeliano, il secondo no.

10. Sia Q il gruppo delle unità dei quaternioni, $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Trovare tutti i sottogruppi di Q e dire quali sono normali.

    A parte i sottogruppi banali (e normali) $\{1\}$ e Q, gli altri sottogruppi di Q devono avere cardinalità o 2 o 4 (per il teorema di Lagrange). I gruppi con 4 elementi possono essere ciclici ($\cong \mathbb{Z}_4$) oppure ogni elemento diverso dall'identità ha ordine 2 ($\cong$ gruppo di Klein). Q però ha solo l'elemento -1 di ordine 2, quindi tutti i sottogruppi non banali di Q sono ciclici. Per trovarli basterà prendere i gruppi generati dai vari elementi: $\langle i \rangle = \{i, -1, -i, 1\}$ (sgr. normale in Q dato che ha indice 2), $\langle j \rangle = \{j, -1, -j, 1\}$ (normale), $\langle k \rangle = \{k, -1, -k, 1\}$ (normale). Rimane da considerare solo il gruppo $\langle -1 \rangle = \{1, -1\}$. Anche quest'ultimo gruppo è normale, dato che -1 è l'unico elemento di ordine 2, e il coniugio conserva l'ordine.

    Il gruppo delle unità dei quaternioni è un gruppo non commutativo in cui tutti i sottogruppi sono normali. Perciò l'implicazione 'G abeliano $\Rightarrow$ ogni sottogruppo di G è normale in G' non si può invertire.

    N.B. I gruppi con otto elementi sono, a meno di isomorfismi, di cinque tipi: il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_8 (\cong C_8)$, altri due gruppi abeliani che ancora non conoscete (e cioé $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$), il gruppo diedrale D_4 e il gruppo Q delle unità dei quaternioni. In particolare D_4 e Q pur essendo entrambi non commutativi non sono isomorfi: Q ha un solo elemento di ordine 2 mentre D_4 ne ha cinque; oppure: Q ha tutti i sottogruppi normali, mentre $\langle \sigma \rangle \ntrianglelefteq D_4$.