I Settimana (6 ore):

Operazioni binarie e loro proprietà. Elementi neutri e invertibili. Semigruppi e monoidi. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento. Gruppi. Esempi. Notazione moltiplicativa ed additiva. Potenze di un elemento. Ordine di un elemento. Sottogruppi. Il gruppo di Klein. Il sottogruppo ciclico generato da un elemento. Gruppi ciclici. Esempi. Sottogruppi di un gruppo ciclico. I sottogruppi di $\mathbb{Z}$. Generatori di un gruppo ciclico. Sottogruppi generati da un sottoinsieme. Centro di un gruppo.

II Settimana (2 ore):

Classi laterali destre: definizione, proprietà ed esempi. Teorema di Lagrange. Applicazioni del teorema di Lagrange. Classi laterali sinistre. Indice di un sottogruppo. Omomorfismi tra gruppi. Nucleo ed immagine di un omomorfismo.

III Settimana (4 ore):

Relazioni d'equivalenza associate ad un sottogruppo: ρ_d e ρ_s. Relazioni compatibili e sottogruppi normali. Gruppo quoziente. Esempi. Teorema fondamentale d'omomorfismo per i gruppi. Esempi.

IV Settimana (4 ore):

Struttura dei gruppi ciclici. Immagini e controimmagini di sottogruppi e di sottogruppi normali rispetto a un omomorfismo. Immagine di un sottogruppo rispetto ad una proiezione canonica. Intersezione e somma di sottogruppi di $\mathbb{Z}$. Controimmagine di un sottogruppo rispetto ad una proiezione canonica. Primo teorema di isomorfismo tra gruppi. Corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G/N ed i sottogruppi di G contenenti N. Secondo teorema di isomorfismo tra gruppi. Esempi. $\mathrm{Aut}(G)$ e $\mathcal{I}(G)$. $G/Z(G) \simeq \mathcal{I}(G)$. $\mathcal{I}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

V Settimana (4 ore):

Azione di un gruppo su un insieme. Esempi di azioni; coniugio. Orbite; stabilizzatore e centralizzante. Equazione delle classi. Un gruppo di ordine p^n con p primo ha centro non banale. Un gruppo di ordine p^2 con p primo è abeliano. Teorema di Cauchy.

VI Settimana (2 ore):

p- gruppi. Esempi. Prodotti diretti; prodotti diretti interni; esempi. $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è ciclico se e solo se n e m sono primi tra loro. Un gruppo di ordine p^2 con p primo è ciclico oppure è un prodotto diretto di due gruppi ciclici. Rappresentazione dei sottogruppi di un gruppo tramite diagrammi di Hasse. Esempi. Classificazione di gruppi di ordine "piccolo".

VII Settimana (3 ore):

Anelli; anelli unitari, anelli commutativi; elementi invertibili e zerodivisori di un anello. Domini di integrità, corpi, campi. Anelli di matrici. Anelli di funzioni. $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cup)$. Caratteristica di un anello unitario, Caratteristica di un dominio d'integrità. Anelli di serie formali (cenni) e anelli di polinomi. Sottoanelli. Esempi. L'anello $B[a]$ con B sottoanello di un anello commutativo unitario A ed $a \in A$. L'anello degli interi di Gauss $Z[i]$.Omomorfismi d'anelli.

Il nucleo di un omomorfismo di anelli.

VIII Settimana (4 ore):

Ideali (destri, sinistri, bilateri). Intersezione, somma e prodotto di ideali. Ideali generati da sottoinsiemi. Ideali principali. Esempi. Ideali bilaterali e relazioni d'equivalenza compatibili. Anello quoziente. Esempi. Teorema fondamentale di omomorfismo. Primo e secondo teorema di isomorfismo per anelli. Teorema di corrispondenza tra gli ideali di A/I e gli ideali di A che contengono I. Ideali massimali ed ideali primi. Caratterizzazioni attraverso l'anello quoziente per anelli commutativi unitari. Ideali di un campo. Esistenza di ideali massimali.

IX Settimana (4 ore):

Il campo $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ e il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$; coniugato e norma di un elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$; loro proprietà; elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Elementi associati in un anello. Elementi primi ed irriducibili in un dominio di integrità; loro caratterizzazione attraverso gli ideali . Esempi di elementi irriducibili e non primi . Domini ad ideali principali (PID). In un PID un elemento irriducibile è primo. Elementi con norma un numero primo sono irriducibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Domini euclidei. Esempi di domini euclidei: $\mathbb{Z}, K[X]$ con K campo,
$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, con $d = -2, -1 - 2, 3$.

X Settimana (4 ore):

Un dominio euclideo è ad ideali principali. MCD e mcm in un dominio di integrità. Domini di Bézout. Domini a MCD. Domini a fattorizzazione unica; loro caratterizzazione.

XI Settimana (8 ore):

Caratteristica di un campo. Sottocampo fondamentale. Estensioni di campi. Grado di una estensione. Estensioni semplici. Elementi algebrici e trascendenti.

Cardinalità. Insiemi infiniti. Cardinalità del numerabile e del continuo. Primo procedimento diagonale di Cantor. Cardinalità dell'insieme delle parti. $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Teorema di Kronecker (per ogni polinomio a coefficienti in un campo esiste una estensione di tale campo nella quale il polinomio ammette radici). Esempi.

Esercitazione sulle estensioni.

XII Settimana (4 ore):

Campo di spezzamento di un polinomio: teorema di esistenza e unicità (cenni). Estensioni algebriche. Il campo dei numeri algebrici. Esempi. Campi algebricamente chiusi. Campi finiti.