UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
APPELLO A
17 gennaio 2007

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte**.

I PARTE

1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo <u>finito</u>.
   Sia $n \in \mathbb{N}^{>0}$ tale che $\forall x, y \in G$ si ha
   $$(xy)^n = x^n y^n \quad (*)$$
   Siano $G_n := \{x \in G \mid x^n = e\}$ e $G^n := \{x^n \mid x \in G\}$.
   (a) Verificare che G_n e G^n sono sottogruppi di G.
   (b) Stabilire se G_n e G^n sono normali in G.
   (c) Sia $\phi : G \to G$ l'applicazione definita da $\phi(x) = x^n$, $\forall x \in G$. Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi e determinarne nucleo ed immagine.
   (d) Cosa si può dedurre dal punto (c)?
   (e) Dimostrare che esistono infiniti $n \in \mathbb{N}^{>0}$ che verificano $(*)$.
   (f) **FAC.** Dimostrare che se $|G| = p^k$ con p un numero primo e $k \in \mathbb{N}^{>0}$, allora p^{k-1} verifica $(*)$ e determinare esplicitamente $G_{p^{k-1}}$ e $G^{p^{k-1}}$.
   (Sugg.: considerare separatamente i due casi G ciclico, G non ciclico).

2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n con base $\{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$. Sia S_n il gruppo simmetrico di grado n.

   Si consideri l'applicazione $\star : S_n \times V \longrightarrow V$ definita nel seguente modo: se $\sigma \in S_n$ e $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e_1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{e_n}$, allora

$$\sigma \star \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_{\sigma(\mathbf{1})} + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_{\sigma(\mathbf{n})}.$$

   (a) Provare che $\star$ è una azione del gruppo S_n sull'insieme V.

   (b) Sia $n = 4$; siano $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$.

      i. Determinare $(1342) \star \mathbf{v}$, $(1432) \star \mathbf{w}$, $(312) \star \mathbf{v}$, $(412) \star \mathbf{w}$, $(14)(32) \star \mathbf{v}$, $(14) \star \mathbf{w}$.

      ii. Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{w}$.

      iii. Stabilire se lo stabilizzatore di $\mathbf{w}$ è normale in S_4.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
APPELLO A
17 gennaio 2007

*Cognome*___________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte**.

II PARTE

1. Stabilire quali dei seguenti ideali sono primi e quali massimali:

   (a) l'ideale generato in $\mathbb{Z}$ da 30 e 42.

   (b) l'ideale generato in $\mathbb{Z}_5[X]$ dal polinomio $X^3 + X + \bar{2}$.

   (c) l'ideale generato in $\mathbb{Z}[i]$ da 2 e da $5 + 5i$.

   (d) l'ideale generato in $\mathbb{Z}[X]$ da $X - 2$.

   (e) l'ideale generato in $\mathbb{Q}[X]$ da $X - 2$.

   (f) l'ideale generato in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ da $(0, 0)$.

   Per ciascuno degli ideali non massimali trovare, infine, un ideale massimale che lo contenga.

2. (a) Elencare tutti i polinomi di secondo grado dell'anello $\mathbb{Z}_2[X]$.
   (b) Sia I l'ideale generato in $\mathbb{Z}_2[X]$ da X^4+X+1. Stabilire se l'anello $\mathbb{Z}_2[X]/I$ è un campo oppure no.
   (c) Stabilire se $(X^6 + X^5 + 1) + I$ è invertibile in $\mathbb{Z}_2[X]/I$ e in caso affermativo, determinare l'inverso.