

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamentali
Tutorato 8 (21 novembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Sia a un intero fissato $\neq 0$. Si consideri in \mathbb{Z} l'operazione binaria $*$ definita da:

$$x * y = x + y - a$$

con x, y numeri interi.

- (a) Verificare che $*$ è associativa e commutativa.
(b) Stabilire se $(\mathbb{Z}, *)$ è un gruppo.
2. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \diamond (c, d) = (a + c, b + c).$$

- (a) Stabilire se \diamond è associativa.
(b) Stabilire se \diamond è commutativa.
(c) Stabilire se esiste un elemento neutro rispetto a \diamond .
3. Sia $H = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \neq 0\}$. Stabilire se H è un gruppo rispetto alla seguente operazione: per $(a, b), (c, d) \in H$

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, b + ad).$$

4. Esprimere le seguenti permutazioni come prodotto di cicli disgiunti e poi come prodotto di trasposizioni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire la parità di $(f \circ g)^{-1}$.

5. Esprimere i seguenti prodotti di permutazioni come prodotto di cicli disgiunti:

$$(8432) \circ (524), \quad (3761)^3, \quad (6512)^{-1}$$

6. Elencare tutti gli elementi di S_3 che sono permutazioni pari.
Elencare tutti gli elementi di S_4 che sono permutazioni dispari.
7. Dare un esempio di un ciclo di lunghezza $d > 2$ il cui quadrato è un ciclo.
Dare un esempio di un ciclo di lunghezza $d > 2$ il cui quadrato non è un ciclo.
Stabilire quali sono i cicli per i quali è vero che il quadrato è ancora un ciclo.