Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Esercizi
28 ottobre 2005

1 Relazioni

1. Sia X un insieme e $\mathcal{P}$ una partizione di X. Verificare che esiste una relazione di equivalenza ρ tale che la partizione associata a ρ è $\mathcal{P}$.

2. In $\mathbb{R}^{2*}$ introduciamo la seguente relazione ρ:

$$(a,b)\rho(c,d) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 0$$

   (a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza

   (b) Possiamo estendere ρ a $\mathbb{R}^2$?

   (c) Determinare la classe di equivalenza $[(a,b)]_\rho$.

2 Insiemi Ordinati

1. Sia $X = \{a,b,c\}$ un insieme con tre elementi distinti e $\mathcal{P}(A)$ il suo insieme delle parti.

   (a) Verificare che $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è un insieme ordinato, non ben ordinato né totalmente ordinato, dotato di un primo ed ultimo elemento.

   (b) Determinare i minorati e i maggioranti di $\{a\}$.

3 Induzione

1. Usando il principio di induzione si dimostri che, per ogni numero naturale positivo n, risulta:

$$1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

2. Per ogni intero $n \geq 1$ sia $\mathcal{P}_n$ un insieme di n rette del piano in "posizione generica" (i.e. cioè non parallele fra loro e non incidenti tre a tre). Dimostrate per induzione che $\mathcal{P}_n$ ripartisce il piano in $1 + \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ regioni distinte.

3. Si consideri la *la successione di Fibonacci* F, definita ricorsivamente nel seguente modo

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1.\ F(k) = F(k-2) + F(k-1), \forall k \geq 2$$

Fissati due numeri reali x e y, si definisca ricorsivamente la seguente successione a:

$$\begin{aligned} a(0) &= x, \\ a(1) &= y, \\ a(k) &= a(k-2) \cdot a(k-1) \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Verificare, per induzione, che

$$a(n) = x^{F(n-1)} \cdot y^{F(n)}, \forall n \geq 1.$$

4 Massimo Comun Divisore

1. Estendere la definizione di MCD al caso di un numero finito di elementi $a_1, \ldots, a_n$, con $n \geq 2$.
2. Assegnati tre elementi non nulli a, b e c:
   (a) Verificare che $MCD(a, b, c) = MCD(a, MCD(b, c))$.
   (b) Verificare che se gli interi a, b, c sono due a due coprimi allora $MCD(ab, ac, bc) = 1$.
   (c) Se $MCD(a, b, c) = 1$ è vero che $MCD(ab, ac, bc) = 1$?
   (d) Se $MCD(a, b, c) = 1$ determinare un'identità di Bézout del tipo $1 = ax + by + cz$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
3. Determinare il massimo comun divisore tra le seguenti coppie di interi ed esprimerlo tramite un'identità di Bezout:
   (a) (1623, 858)
   (b) (1234, 453)
   (c) (845, 30)
   (d) (963, 63)

5 Congruenze

1. Sia p un numero primo, sia $a \in \mathbb{N}$ tale che $1 \leq a \leq p^2$. Quali a sono privi di inverso aritmetico $\mod p^2$.

2. Siano n e m interi ≥ 2, tali che $n|m$. Sia $a \in \mathbb{N}$ tale che $1 \leq a < n$. Verificare che se a ha inverso aritmetico modulo m lo ha anche modulo n. E' vero che se a ha inverso aritmetico modulo n lo ha modulo m?