UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
APPELLO C
19 giugno 2006

*Cognome*____________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **MOTIVANDO** tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che, per ogni $n \geq 1$:

$$2^n + (-1)^{n+1} \equiv 0 \pmod 3$$

(b) Dimostrare che se $a, b \in \mathbb{Z}$ ed n un intero ≥ 2 sono tali che $a \equiv b \pmod n$, allora

$$\mathrm{MCD}(a, n) = \mathrm{MCD}(b, n).$$

.

2. Nell'insieme $X := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 6, 9, 12\}$ si consideri la seguente relazione

$$x\sigma y \Leftrightarrow x|y \text{ in } \mathbb{Z}, \text{ cioè esiste } c \in \mathbb{Z} \text{ tale che } xc = y.$$

(a) Stabilire di quali delle seguenti proprietà gode la relazione σ:

i. riflessiva

ii. simmetrica

iii. antisimmetrica

iv. transitiva

v. totale.

(b) Nell'insieme X si consideri la seguente relazione ρ:

$$x\rho y \Leftrightarrow x\sigma y \text{ e } y\sigma x.$$

Verificare che ρ è una relazione di equivalenza su X e determinare le classi di equivalenza modulo ρ.

(c) (FAC) La relazione σ' definita in X/ρ nel seguente modo:

$$[x]_\rho \sigma' [y]_\rho \Leftrightarrow x\sigma y,$$

è una relazione d'ordine. Rappresentare $(X/\rho, \sigma')$ tramite un diagramma lineare.

3. In S_9 sono date le permutazioni:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Decomporre α e β nel prodotto di cicli disgiunti.

(b) Calcolare $\alpha \circ \beta^2$ e $\beta^{-1} \circ \alpha^{-2}$.

(c) Determinare il segno di $\alpha \circ \beta$.

4. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi:

   (a) $\phi_1 : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ definita da $\phi_1(x) = 3x$;
   (b) $\phi_2 : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ definita da $\phi_2(x) = 2^x$;
   (c) $\phi_3 : (\mathbb{Q}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ definita da $\phi_3(x) = x^3$;
   (d) $\phi_4 : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ definita da $\phi_4(x) = |x|$.

5. Si considerino i polinomi di $\mathbb{Q}[X]$:

$$f(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X, \quad g(X) = X^2 + \lambda.$$

(a) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per i quali $f(X)$ è divisibile per $g(X)$.

(b) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per i quali $f(X)$ e $g(X)$ sono primi tra loro.

(c) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per i quali $f(X)$ non è divisibile né primo con $g(X)$.