UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
APPELLO B
14 febbraio 2006

*Cognome*____________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **MOTIVANDO** tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

1. Stabilire quali tra le seguenti corrispondenze $\chi = (X, Y, G)$ dove X, Y sono insiemi e $G \subseteq X \times Y$ sono applicazioni:
   (a) $\chi_1 = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, G_1)$ con $G_1 = \{(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad | \quad n = |z|\}$;
   (b) $\chi_2 = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, G_2)$ con $G_2 = \{(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad | \quad n + z = 2\}$;
   (c) $\chi_3 = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, G_3)$ con $G_3 = \left\{(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad | \quad z^2 = n\right\}$;
   (d) $\chi_4 = (\mathbb{Z}, \mathbb{N}, G_4)$ con $G_4 = \{(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad | \quad z + n = 3\}$;
   (e) $\chi_5 = (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, G_5)$ con $G_5 = \left\{(z, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \quad | \quad q = \frac{1}{z}\right\}$.

2. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

   (a) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha :

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{3}{4}\left[(2n-1)3^n + 1\right];$$

   (b) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ si ha che

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

3. In $\mathbb{C} - \{0\}$ si consideri la seguente relazione ρ:

$$\alpha \rho \beta \Leftrightarrow \alpha|\beta| = \beta|\alpha|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

(a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{C} - \{0\}$.

(b) Descrivere esplicitamente:

$$[1]_\rho,\ [i]_\rho,\ [-1]_\rho,\ [-i]_\rho,\ [i+1]_\rho.$$

(c) Descrivere geometricamente le classi di equivalenza di ρ.

(d) Determinare, a meno di isomorfismi, l'insieme quoziente.

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti anelli R:

   (a) $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$;
   (b) $(\mathbb{Z}_{14}, +, \cdot)$;
   (c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;
   (d) $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$;
   (e) $(\mathbb{Z}_5[X], +, \cdot)$;
   (f) $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$;

   (a) Per ciascuno di essi, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili $U(R)$.
   (b) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.

5. Decomporre in fattori irriducibili i seguenti polinomi:

   (a) $X^8 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$, in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$;

   (b) $X^8 + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$, in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$;

   (c) $5X^4 + 18X^3 + 33X^2 - 15X - 21$ in $\mathbb{Z}[X]$;

   (d) $X^3 + \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_5[X]$.