Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli
Prima prova di valutazione intermedia, 5 Aprile 2006

1. Sia $\alpha = \sqrt[3]{5}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Verificare che K ha grado 3 su $\mathbb{Q}$ ed esprimere i seguenti elementi come polinomi di grado al più 2 in α:

$$\alpha^5 - \alpha^6 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

2. Sia $f(X) := X^3 + 3X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia α una sua radice reale.
   (1) Stabilire se $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$;
   (2) Stabilire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è normale su $\mathbb{Q}$;
   (3) Determinare la struttura del gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

3. Sia $f(X) := X^4 - 2X^2 - 2$ e sia K il suo campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.
   (1) Determinare la struttura del gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$;
   (2) (*facoltativo*) Determinare un elemento primitivo per K.

4. Sia ξ una radice primitiva decima dell'unità.
   (1) Determinare esplicitamente gli automorfismi di $\mathbb{Q}(\xi)$;
   (2) Verificare che $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\xi^2)$;
   (3) Determinare il polinomio minimo del numero $\alpha := \xi^2 + \xi^8$;
   (4) Usando (3), calcolare esplicitamente α.