Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli
Prima prova di valutazione intermedia, 5 Aprile 2006
Soluzione

1. Sia $\alpha = \sqrt[3]{5}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Verificare che K ha grado 3 su $\mathbb{Q}$ ed esprimere i seguenti elementi come polinomi di grado al più 2 in α:

$$\alpha^5 - \alpha^6 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$$

Soluzione

Per determinare il grado dell'estensione cerchiamo il polinomio minimo di α. Poniamo $p(X) = X^3 - 5$, è facile vedere che α è radice di $p(X)$ e che $p(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$ (per esempio usando il criterio di Eisenstein). Quindi $[K : \mathbb{Q}] = deg(p) = 3$. Ricordiamo che 1, α, α^2 formano una $\mathbb{Q}$ base di K, quindi ogni elemento di K si scrive nella forma:

$$a + b\alpha + c\alpha^2 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Ricordiamo inoltre che $\alpha^3 = 5$. Quindi

$$\alpha^5 - \alpha^6 = \alpha^2\alpha^3 - \alpha^3\alpha^3 = 5(\alpha^2 - 5).$$

Per trovare l'espressione di $\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$ cominciamo da

$$\alpha = (\alpha^2 + 1)(a\alpha^2 + b\alpha + c) = (a + 5b) + (b + 5c)\alpha + (a + c)\alpha^2$$

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ a + 5b &= 0, \\ b + 5c &= 1. \end{aligned}$$

Quindi, risolvendo, si ha

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+1} = \frac{1}{26}(5\alpha^2 + \alpha - 5)$$

2. Sia $f(X) := X^3 + 3X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia α una sua radice reale.

(1) Stabilire se $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$;

(2) Stabilire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è normale su $\mathbb{Q}$;

(3) Determinare la struttura del gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

Soluzione

(1) Sia $a \in \mathbb{Q}$ una radice intera di $f(X)$, allora $a|6$, quindi $a = \pm 1$, ± 2, ± 3 o ± 6. Una verifica diretta mostra che nessuno di questi è radice, quidi, poichè $f(X)$ ha grado 3, $f(X)$ è irriducibile.

alternativamente Usando il criterio di Eisenstein con $p = 3$ si ha direttamente che $f(X)$ è irriducibile

(2) Ricordiamo che $\mathbb{Q}(\alpha)$ è normale se è il campo di spezzamente di $f(X)$ (perchè $f(X)$ è irriducibile). Osserviamo che

$$X^3 + 3X + 6 = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + (\alpha^2 + 3))$$

Poniamo $p(X) = X^2+\alpha X+(\alpha^2+3)$ allora $p(X)$ ha due radici complesse coniugate, infatti

$$\Delta = \alpha^2 - 4(\alpha^2 + 3) = -3(\alpha^2 + 4) < 0$$

Dunque l'estensione non è normale.

(3) Sia β una radice di $p(X)$, si ha che $K = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ è il campo si spezzamento di f e

$$[Q(\alpha, \beta); \mathbb{Q}] = [Q(\alpha, \beta); \mathbb{Q}(\alpha)][Q(\alpha); \mathbb{Q}] = 3 * 2 = 6$$

Poiché K è normale si ha

$$|Gal_{\mathbb{Q}}(K)| = [Q(\alpha, \beta); \mathbb{Q}] = 6,$$

quindi $Gal_{\mathbb{Q}}(K)$ è un sottogruppo di ordine 6 di S_3, ne segue che $Gal_{\mathbb{Q}}(K) = S_3$.

3. Sia $f(X) := X^4 - 2X^2 - 2$ e sia K il suo campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.

(1) Determinare la struttura del gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$;

(2) (*facoltativo*) Determinare un elemento primitivo per K.

Soluzione

(1) Notiamo che $f(X) = 0$ ha due radici reali distinte e due radici complesse distinte. Sia α una radice reale e β una radice complessa, si ha che $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ è il campo di spezzamento di f e che

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta); \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta); \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha); \mathbb{Q}] = 4 * 2 = 8$$

Poiché K è normale si ha

$$|Gal_{\mathbb{Q}}(K)| = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta); \mathbb{Q}] = 8,$$

quindi $Gal_{\mathbb{Q}}(K)$ è un sottogruppo di ordine 8 di S_4, ne segue che $Gal_{\mathbb{Q}}(K) = D_4$.

(2) Determiniamo le radici di f. Un semplice calcolo mostra che le radici sono

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sqrt{1+\sqrt{3}} \\
\alpha_2 &= -\sqrt{1+\sqrt{3}} \\
\alpha_3 &= \beta_1 = i\sqrt{\sqrt{3}-1} \\
\alpha_4 &= \beta_2 = -i\sqrt{\sqrt{3}-1}
\end{aligned}$$

Il teorema dell'elemento primitivo ci dice che $\alpha_1 + c\beta_1$ è l'elemento primitivo purché $c \neq c_{1,2} = 0$, $c_{2,2} = 1$, $c_{3,2} = \frac{1}{2}$, $c_{4,2} = \frac{3}{2}$ con

$$c_{i,j} = \frac{\alpha_1 - \alpha_i}{\beta_j - \beta_1}.$$

4. Sia ξ una radice primitiva decima dell'unità.

   (1) Determinare esplicitamente gli automorfismi di $\mathbb{Q}(\xi)$;

   (2) Verificare che $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\xi^2)$;

   (3) Determinare il polinomio minimo del numero $\alpha := \xi^2 + \xi^8$;

   (4) Usando (3), calcolare esplicitamente α.

   Soluzione

   (1) Data ξ rradice primitiva decima dell'unità, ξ^h è una radice primitiva se e solamente se $MCD(h, 10) = 1$, i.e. $h = 1, 3, 7, 9$. Dalla teoria sappiamo che un automorfismo manda una radice primitiva in una radice primitiva, quindi possiamo definire 4 automorfismi di $\mathbb{Q}(\xi)$ nel modo seguente:

   $$\phi_h(\xi) = \xi^h$$

   con $h = 1, 3, 7, 9$.

   (2) Notiamo che $\mathbb{Q}(\xi^2) \subset \mathbb{Q}(\xi)$, inoltre ξ^2 è una radice primitiva quinta dell'unità, quindi $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\xi^2) = 4 = \dim \mathbb{Q}(\xi)$. Segue che $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\xi^2)$.

(3) Poiché $\zeta = \xi^2$ è una radice quinta dell'unità, il grado del polinomio minimo di $\zeta + \zeta^{-1} = \xi^2 + \xi^8$ è 1 2 o 4 (i.e. i divisori del grado del polinomio minimo di ζ).

$$(\zeta + \zeta^{-1})^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} + 2$$

Notiamo che $\zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta + \zeta^{-1} = -1$. Quindi $\zeta + \zeta^{-1}$ è radice di $f(X) = X^2 + X - 1$.

alternativamente Calcoliamo i coniugati di $\zeta + \zeta^{-1}$ tramite il gruppo di Galois.

$$\begin{aligned}
\phi_1(\zeta + \zeta^{-1}) &= \zeta + \zeta^{-1} \\
\phi_3(\zeta + \zeta^{-1}) &= \zeta + \zeta^{-1} \\
\phi_7(\zeta + \zeta^{-1}) &= \zeta^2 + \zeta^{-2} \\
\phi_9(\zeta + \zeta^{-1}) &= \zeta^2 + \zeta^{-2}
\end{aligned}$$

Allora il polinomio minimo è dato da

$$\begin{aligned}
f(X) &= (X - (\zeta^2 + \zeta^{-2})(X - (\zeta + \zeta^{-1})) \\
&= X^2 - (\zeta^2 + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{-2})X + (\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta + \zeta^{-1})
\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\zeta^2 + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} &= \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = -1 \\
(\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta + \zeta^{-1}) &= \zeta^3 + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{-3} = -1
\end{aligned}$$

Quindi $f(X) = X^2 + X - 1$

(4) Poiché $\zeta + \zeta^{-1}$ è radice di $X^2 + X - 1$ si ha che

$$\zeta + \zeta^{-1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$