Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
AL310 – Istituzioni di Algebra Superiore
Appello B

Esercizio 1. Si consideri il numero reale $\alpha := \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ e sia $K := \mathbf{Q}(\alpha)$.

(i) Si estendano gli automorfismi di $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ a $\mathbf{Q}$-immersioni di K in $\mathbf{C}$.
(ii) Se esiste, si trovi un polinomio $f(T) \in \mathbf{Q}[T]$ il cui campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ sia K.
(iii) Si calcoli il gruppo di Galois di $f(T)$ su $\mathbf{Q}$, e si illustri la corrispondenza di Galois.

Esercizio 2. Siano ζ una radice primitiva ventitreesima dell'unità e $K := \mathbf{Q}(\zeta)$.

(i) Dopo aver determinato il gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, si illustri la corrispondenza di Galois, esibendo, per ciascun campo intermendio fra $\mathbf{Q}$ e K, un suo elemento primitivo su $\mathbf{Q}$.
(ii) Dopo aver spiegato perché l'ampliamento $\mathbf{Q}(\sqrt[23]{2}) \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt[23]{2}, \zeta)$ è di Galois, si definisca un omomorfismo iniettivo di gruppi $\phi : \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[23]{2}, \zeta)/\mathbf{Q}(\sqrt[23]{2})) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}))$, e si dica se ϕ è un isomorfismo.

Esercizio 3. Si ponga $K := \mathbf{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{14}, \sqrt{35})$.

(i) Si calcoli $[K : \mathbf{Q}]$, giustificando la risposta.
(ii) Dopo aver descritto $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, si trovino tutti i campi intermedi fra $\mathbf{Q}$ e K.
(iii) Si trovi il gruppo di Galois (su $\mathbf{Q}$) del polinomio $(T^2 - 10)(T^2 - 14)(T^{11} - 1)$.

Esercizio 4.

(i) Si esibiscano due polinomi di grado 2 monici e irridicibili $f(T), g(T) \in \mathbf{F}_3[T]$.
(ii) Si costruiscano i campi $K := \mathbf{F}_3[T]/(f(T)), L := \mathbf{F}_3[T]/(g(T))$.
(iii) Si trovino tutti gli isomorfismi $K \longrightarrow L$.

Esercizio 5. Sia λ un numero reale tale che $\lambda^5 = 2\lambda + 2$.

(i) Si stabilisca se $\lambda + \lambda^{-1} \in \mathbf{Q}$.
(ii) Si determini il grado del polinomio minimo di λ^2 e di $(\lambda + \lambda^{-1})^2$ su $\mathbf{Q}$.
(iii) Si dimostri che l'ampliamento $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\lambda)$ non è di Galois.

Esercizio 6. Siano p un numero primo, n un intero positivo, $f(T) \in \mathbf{F}_p[T]$ un polinomio irriducibile di grado 2^n e K un campo di spezzamento di $f(T)$ su $\mathbf{F}_p$. Si dica se possono esistere due sottocampi F_1, F_2 di K tali che $F_1 \nsubseteq F_2$ e $F_2 \nsubseteq F_1$.