Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
TE1-Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Appello X
12 Settembre 2008

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice ventiduesima primitiva dell'unità.

(a) Identificare $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta))$ con un gruppo noto.

(b) Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$.

(c) Determinare, se esiste, un elemento $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta)$ il cui polinomio minimo f su $\mathbb{Q}$ abbia grado 5 e tutte le radici reali.

(d) Stabilire se il polinomio f è risolubile per radicali.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio $g := g(X) := X^{14} + X^7 + 3$.

(a) Stabilire, motivando la risposta, se g è separabile su $\mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_7$ (può essere utile ricordare che $a^p \equiv a \pmod{p}$, per ogni $a \in \mathbb{Z}$ e per ogni p primo).

(b) Determinare un campo di spezzamento L di g su $\mathbb{F}_7$.

(c) Dimostrare che l'ampliamento $L/\mathbb{F}_7$ è di Galois, calcolare $[L : \mathbb{F}_7]$ e determinare tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_7}(L)$.

(d) Detta Ω una chiusura algebrica di $\mathbb{F}_7$, sia $\alpha \in \Omega$ un elemento algebrico su L di grado 3. Quanti sono i campi F tali che $\mathbb{F}_7 \subsetneq F \subsetneq L(\alpha)$? Perché?

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $h := h(X) := X^3 + 2X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia α una sua radice reale.

(a) Determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e stabilire se l'ampliamento $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ è normale.

(b) Determinare la struttura del gruppo di Galois di h su $\mathbb{Q}$.

(c) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2) = \mathbb{Q}(\alpha^3)$, e determinare il polinomio minimo di α^3 su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Determinare un ampliamento di Galois K di $\mathbb{Q}$ con la seguente proprietà:
esiste un unico campo F tale che $\mathbb{Q} \subsetneq F \subsetneq K$ e si ha $[K : \mathbb{Q}] = 4$.