Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
TE1-Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Appello B
8 Luglio 2008

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Siano $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice ventunesima primitiva dell'unità, $K := \mathbb{Q}(\zeta)$.

(a) Dette λ, μ, rispettivamente, una radice settima e cubica primitive dell'unità, dimostrare esplicitamente che $K = \mathbb{Q}(\lambda, \mu)$.

(b) Poniamo $L := \mathbb{Q}(\lambda), M := \mathbb{Q}(\mu)$. Dire perché $(\phi|_L, \phi|_M) \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L) \times \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(M)$, per ogni $\mathbb{Q}-$automorfismo ϕ di K.

(c) Dedurre dai punti precedenti che l'omomorfismo di gruppi

$$\tau : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L) \times \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(M) \qquad \phi \mapsto (\phi|_L, \phi|_M)$$

è ben definito ed è un isomorfismo.

(d) Determinare un ampliamento biquadratico N di $\mathbb{Q}$ contenuto in K e calcolare $\mathrm{Gal}_N(K)$.

(e) Stabilire se esistono sottocampi reali di K di grado 2 su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. Poniamo $\alpha := \sqrt{1+\sqrt[3]{2}}$.

(a) Determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, e verificare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un ampliamento radicale di $\mathbb{Q}$.

(b) Stabilire, motivando la risposta, se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di qualche polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

(c) Determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$, stabilendo quali di esse sono $\mathbb{Q}-$automorfismi.

(d) Determinare un sottocampo proprio K di $\mathbb{Q}(\alpha)$ tale che l'ampliamento $\mathbb{Q}(\alpha)/K$ sia normale, e determinare tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}_K(\mathbb{Q}(\alpha))$.

(e) Sia L un ampliamento di Galois di $\mathbb{Q}$ tale che $[K : \mathbb{Q}] = 30$. Dimostrare che $\alpha \notin L$.

Esercizio 3. Sia K un ampliamento di Galois di $\mathbb{Q}$ tale che $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K) \cong S_3$.

(a) Quanti campi quadratici contiene K? Perché?

Sia K un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $X^3 - 3$.

(b1) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) \nsubseteq K$.

(b2) Detto L un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $(X^3-3)(X^2-7)$, determinare $[L : \mathbb{Q}]$ e la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L)$.