Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
TE1-Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Seconda prova di valutazione intermedia
5 Giugno 2008

*Cognome*____________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Siano $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice ventiseiesima primitiva dell'unità, e $K := \mathbb{Q}(\zeta)$.

(a) Calcolare $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$, e definire un isomorfismo di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ con un gruppo noto.

(b) Determinare il grado del polinomio minimo di $\zeta + \zeta^{-1}$ su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare, motivando il modo esauriente la risposta, TUTTI i campi reali contenuti in K.

(d) Stabilire se $\sqrt[3]{2} \in K$.

Esercizio 2. Siano $\omega \in \mathbb{C}$ una radice terza primitiva dell'unità, $K := \mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

(a) Dimostrare accuratamente che $[K : \mathbb{Q}] = 12$.

(b) Dimostrare che K è un ampliamento normale di $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(K)$, stabilire se è risolubile e determinarne eventualmente una serie risolvente.

(d) Illustrare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$, e determinare i campi intermedi F tra $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e K tali che F è normale su $\mathbb{Q}$.

(e) Identificare $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ con un prodotto diretto di gruppi noti.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f := X^4 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$, e siano K un campo di spezzamento di f su $\mathbb{F}_3$, $\alpha \in K$ una radice di f.

(a) Dimostrare che f è irriducibile e separabile.

(b) Dimostrare che esiste un unico automorfismo τ di $\mathbb{F}_3(\alpha)$ tale che $\tau(\alpha) = \alpha^3$.

(c) Dimostrare che $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$, e descrivere la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{F}_3 \subseteq K$.

(d) Determinare un elemento primitivo e una risolvente di Galois su $\mathbb{F}_3$ per ciascun campo F tale che $\mathbb{F}_3 \subsetneq F \subsetneq K$.