Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2007/2008
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello C
11 giugno 2008

*Cognome*__________________ *Nome*____________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici

1. Si condideri il seguente sottogruppo del gruppo $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Z}_3)$ delle matrici invertibili del terzo ordine ad elementi in $\mathbb{Z}_3$ (rispetto al prodotto righe per colonne);

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

   (a) Verificare che ogni elemento diverso dall'elemento neutro ha ordine 3;
   (b) Trovare il centro $Z(G)$ di G;
   (c) Trovare l'ordine del gruppo $G/Z(G)$; stabilire se $G/Z(G)$ è abeliano e/o ciclico.

2. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti. Si consideri l'anello commutativo unitario $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ (Dove $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ è la differenza simmetrica).

   (a) Verificare che l'anello $\mathcal{P}(X)$ è booleano, cioé per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ si ha che $A^2 = A$.

   (b) Provare che $\mathcal{P}(X)$ è un dominio d'integrità se e solo se $|X| = 1$.

   (c) Sia $x \in X$; sia

   $$I_x = \{A \in \mathcal{P}(X) \quad | \quad x \notin A\}\,.$$

   Provare che I_x è un ideale massimale di $\mathcal{P}(X)$.

   (d) Provare che $\mathcal{P}(X)/I_x \cong \mathbb{Z}_2$.

   (e) Se $|X| = 3$, determinare tutti gli ideali di $\mathcal{P}(X)$ e mostrare che ogni ideale massimale è del tipo I_x per qualche $x \in X$.

3. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   (a) Provare che 3 e $1-\sqrt{-5}$ sono elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irriducibili e non primi;

   (b) Sia $I = \big(3, 1-\sqrt{-5}\big)$.

   - Verificare che $I \neq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;
   - Provare che I non è un ideale principale.

4. Si consideri nell'anello $\mathbb{Z}_3[X]$ il polinomio $f(X) = X^4 + X + 2$; sia $I = (X^4 + X + 2)$.

   (a) Stabilire se il polinomio $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[X]$.

   (b) Descrivere l'anello $\mathbb{Z}_3[X]/I$.

   (c) Stabilire se $(X^7 + 2X^5 + X^2 + 2) + I$ è invertibile in $\mathbb{Z}_3[X]/I$ e, nel caso lo sia, trovarne l'inverso.