Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello B
15 febbraio 2005
Soluzione

1. Sia C_{21} il gruppo delle radici complesse 21-esime dell'unità.
   (a) Verificare che C_{21} è un gruppo ciclico.
   (b) Determinare i suoi generatori.
   (c) Determinare i suoi sottogruppi.

   Soluzione Ricordiamo che

$$C_{21} = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^{21} - 1 \right\} = \left\{ z_k = e^{\frac{2\pi i}{21}k} : k = 0 \dots 20 \right\}$$

   (a) Poniamo $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{21}}$, allora

$$z_k = e^{\frac{2\pi i}{21}k} = \left(e^{\frac{2\pi i}{21}} \right)^k = \zeta^k.$$

   quindi

$$C_{21} = \langle \zeta \rangle$$

   (b) I generatori di C_{21} sono i ζ^k tali che $mcd(k, 21) = 1$, cioè le radici primitive dell'unità.
   (c) C_{21} è un gruppo ciclico, quindi ha un sottogruppo per ogni divisore dell'ordine. $Ord(C_{21}) = 21 = 7 \cdot 3$. Quindi ci sono due sottogruppi non banali, dati da

$$H = \langle \zeta^3 \rangle$$
$$K = \langle \zeta^7 \rangle$$

   tali che $Ord(H) = 7$ e $Ord(K) = 3$

2. Sia
$$Gl_2\left(\mathbb{C}\right) = \left\{ A = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det A \neq 0 \right\}.$$

   (a) Verificare che l'applicazione
$$\phi : (GL_2(\mathbb{C}), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot) \text{ definita da } \phi(A) = \det A$$
   è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Applicare il teorema di omomorfismo.

   Soluzione

   (a) Dobbiamo verificare che $\phi(A \cdot B) = \phi(A)\phi(B)$ per ogni A e $B \in Gl_2$
$$\begin{array}{rcl} \phi(A \cdot B) & = & \det(A \cdot B) \\ & = & \det\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array}\right)\right) \\ & = & a\alpha d\delta + b\gamma c\beta - c\alpha b\delta - d\gamma a\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi(A) \cdot \phi(B) & = & \det(A)\det(B) \\ & = & \det\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right) \det\left(\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array}\right)\right) \\ & = & a\alpha d\delta + b\gamma c\beta - c\alpha b\delta - d\gamma a\beta \end{array}$$

   Quindi ϕ è un omomorfismo

   (b) Per applicare il teorema di omomorfismo dobbiamo determinare il nucleo e l'immagine di ϕ
$$\ker\phi = \{A \in Gl_2 : \det(A) = 1\} = Sl_2(\mathbb{C})$$
$$\mathtt{Im}\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : \exists\, A \in Gl_2 \text{ e } \phi(A) = z\} = \mathbb{C}^*$$
   Allora il teorema di omomorfismo ci dice che esiste un isomorfismo
$$\overline{\phi} : Gl_2(\mathbb{C})/\ker\phi \to \mathbb{C}^*$$
   definito da
$$\overline{\phi}(A\ker\phi) = \det(A)$$

3. Sia $p \geq 2$ primo e si consideri l'anello

$$R = M_2(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

con l'usuale somma e prodotto fra matrici.

(a) Determinare la cardinalità di R.

(b) Verificare che R non è commutativo.

(c) Determinare il centro di R,

$$Z(R) = \{x \in R : xy = yx, \text{ per ogni } y \in R\}$$

e verificare che esso è isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

(d) Stabilire se

$$S = Gl_2(\mathbb{Z}_p) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R : \det A \neq 0 \right\}$$

è un sottoanello di R.

Soluzione

(a) $\#(R) = p^4$

(b) Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi R non è commutativo.

(c) Sia $x \in R$ allora $x \in Z(R) \Leftrightarrow \forall y \in R \; xy = yx$, risolvendo il sistema associato otteniamo che:

$$x \in Z(R) \Leftrightarrow x = a \cdot Id \text{ e } a \in \mathbb{Z}_p$$

Quindi possiamo definire l'applicazione $\phi : Z(R) \to \mathbb{Z}_p$ tramite $\phi(a \cdot Id) = a$. Si verifica facilmente che ϕ è un isomorfismo di anelli.

(d) S non è un sottoanello perché $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S$

4. Sia $f(X) = X^4 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (a) Determinare il campo di spezzamento K di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

   (b) Stabilire il grado di K su $\mathbb{Q}$.

   (c) Determinare una base di K su $\mathbb{Q}$.

   Soluzione

   (a) Osserviamo che $X^4 + 4$ *non è irriducibile*, infatti:

   $$X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2x + 2)$$

   Sia $f(X) = X^2 + 2X + 2$, f è irriducibile perché di grado 2 e non ha radici in $\mathbb{Q}$. Osserviamo che in $\mathbb{C}$, f ha per radici $X_1 = -1 + i$ e $X_2 = -1 - i$. Allora

   $$\mathbb{Q}[X]/(f(X)) \cong \mathbb{Q}[-1 + i] = \mathbb{Q}[i]$$

   Quindi il campo di spezzamento di f è $\mathbb{Q}[i]$. Sia $g(X) = X^2 - 2X + 2$, vediamo se g è irriducibile o no su $\mathbb{Q}[i]$. Notiamo che le radici di g sono $X_3 = 1 + i$ e $X_4 = 1 - i$, quindi g è riducibile e

   $$g(X) = (X - (1 + i))(X - (1 - i)).$$

   Dunque il campo di spezzamento di $X^4 + 4$ è $\mathbb{Q}[i]$.

   (b) Il grado di $\mathbb{Q}[i]$ su $\mathbb{Q}$ è dato dal grado del polinomio minimo di i su $\mathbb{Q}$, quindi $[\mathbb{Q}[i] : \mathbb{Q}] = 2$

   (c) Una base di $\mathbb{Q}[i]$ su $\mathbb{Q}$ è data da $\{1, i\}$.