Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Soluzioni
26 Novembre 2004

1 Anelli e Ideali

1. Dati due anelli R e R', introdurre una struttura di anello nel prodotto cartesiano $R \times R'$.

   Soluzione 1.1. *Osserviamo che* $(R, +)$ *e* $(R', +)$ *sono gruppi abeliani, consideriamo* $(R \times R', +)$ *il prodotto diretto. Definiamo il prodotto su* $(R \times R', +)$*. Siano* (a, b) *e* $(x, y) \in R \times R'$ *poniamo*

   $$(a, b) \bullet (x, y) = (ax, by)\,.$$

   la compatibilità fra le due operazioni è data dalla compatibilità delle operazioni di R *e* R'*.*

2. Sia R un anello tale che $a^2 = a \ \forall a \in R$; dimostrare che R è commutativo.

   Soluzione 1.2. *Ricordiamo che* R *è abeliano se è abeliano come gruppo moltiplicativo. Siano* a *e* $b \in R$ *allora*

   $$ab = (ab)^2 \ \text{ e } ab = a^2b^2$$

   Dunque $(ab)^2 = ab = a^2b^2$ *da cui* R *è abeliano.*

3. Siano I e J due ideali di un anello R tali che $I \cap J = \{0\}$; dimostrere che, $\forall h \in I$ e $\forall k \in J$, risulta $hk = 0$.

   Soluzione 1.3. *Sia* $h \in I$ *e* $k \in J$ *allora dalle proprietà degli ideali si ha che:*

   $$hk \in I$$
   $$hk \in J$$

   Dunque $hk \in I \cap J = \{0\}$*.*

4. Si studi la relazione di inclusione nell'insieme degli ideali degli anelli $\mathbb{Z}_{101}$ e $\mathbb{Z}_{90}$; dire quali fra gli ideali sono massimali e quali minimali. Determinare i quozienti relativi agli ideali massimali e minimali.

Soluzione 1.4. *Ricordiamo che in $\mathbb{Z}_n$ si ha:*

$$\begin{aligned} I \text{ è un ideale} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z} : p|q \text{ e } I = q\mathbb{Z}_n \\ q\mathbb{Z}_n \subset w\mathbb{Z}_n \quad &\Leftrightarrow \quad w|q \end{aligned}$$

Sia $n = p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}$ una decomposizione in primi di n. Allora $m\mathbb{Z}_n$ è massimale $\Leftrightarrow m = p_j$ per qualche j ed è minimale $\Leftrightarrow m = p_1^{i_1} \cdots p_j^{i_j - 1} \cdots p_k^{i_k}$ per qualche j. Consideriamo $\mathbb{Z}_{101}$, 101 è primo, dunque $\mathbb{Z}_{101}$ non ha ideali non banali. Consideriamo $\mathbb{Z}_{90}$, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, i suoi ideali massimali sono $2\mathbb{Z}_{90}$, $3\mathbb{Z}_{90}$ e $5\mathbb{Z}_{90}$, mentre i suoi ideali minimali sono $45\mathbb{Z}_{90}$, $18\mathbb{Z}_{90}$ e $30\mathbb{Z}_{90}$. I quozienti sono nell'ordine $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{45}$, $2\mathbb{Z}_{18}$, e $\mathbb{Z}_{30}$. Infine abbiamo il seguente diagramma delle inclusioni:

$$\begin{tikzcd}
 & & 6\mathbb{Z}_{90} \arrow[dr] \arrow[dddr] & & \\
 & 18\mathbb{Z}_{90} \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2\mathbb{Z}_{90} \arrow[ddr] & \\
 & & 9\mathbb{Z}_{90} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
90\mathbb{Z}_{90} = \{0\} \arrow[r] \arrow[uur] \arrow[ddr] & 30\mathbb{Z}_{90} \arrow[uuur] \arrow[dr] \arrow[dddr] & & 3\mathbb{Z}_{90} \arrow[r] & 1\mathbb{Z}_{90} = \mathbb{Z}_{90} \\
 & & 10\mathbb{Z}_{90} \arrow[uuur] \arrow[dr] & & \\
 & 45\mathbb{Z}_{90} \arrow[uuur] \arrow[dr] & & 5\mathbb{Z}_{90} \arrow[uur] & \\
 & & 15\mathbb{Z}_{90} \arrow[uuur] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Dove le freccie indicano l'inclusione.

5. Se F è un campo dimostrare che i suoi soli ideali sono quelli banali.

   Soluzione 1.5. *Sia I un ideale non nullo di F. Sia $i \in I$ allora esiste $a \in F$ tale che $ia = 1$. Quindi $1 = ai \in I \Rightarrow I = F$*

2 Ideali

1. Sia R un anello, I un ideale di R e $1 \in I$ allora $I = R$

   Soluzione 2.1. *Ricordiamo che se I è un anello allora, $\forall a \in I$ e $\forall b \in R$: $ba \in I$. Poiché $1 \in I$ allora,$\forall a \in R$, $a = a \cdot 1 \in I$.*

2. Sia R un anello commutativo e $a \in R$

   (a) dimostrare che $aR = \{ar : r \in R\}$ è un ideale bilatero di R.

   (b) dimostrare con un esempio che ciò può non essere vero se R non è commutativo.

   Soluzione 2.2. *(a) aR è un idela destro per definizione, poichè R è commutativo, ogni ideale destro è anche un ideale sistro.*

   (b) Consideriamo $R = M_2(\mathbb{R})$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

   $$aR = \{A = (a_{ij}) : a_{2j} = 0 \forall j\}$$

   che è un ideale destro ma non sinistro.

3. Dimostrare che tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono della forma $n\mathbb{Z}$.

   Soluzione 2.3. *Sappiamo che un ideale di un anello R è anche un sottogruppo additivo. I sottogruppi additivi di $\mathbb{Z}$ sono $n\mathbb{Z}$, per cui tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono della forma $n\mathbb{Z}$. É facile verificare che ogni $n\mathbb{Z}$ è un ideale.*

4. Dimostrare che $n\mathbb{Z}$ è un ideale primo se e solo se n è primo o $n = 0$.

   Soluzione 2.4. *Supponiamo I primo non nullo. Allora $I = n\mathbb{Z}$ per qualche n.*

   $$I \text{ primo} \Rightarrow \forall a \text{ e } b \in R : ab \in I \text{ allora } a \in I \text{ o } b \in I.$$

   La seconda parte ci dice che:

   $$\forall a \text{ e } b \in \mathbb{Z} : n | ab \Rightarrow n | a \text{ o } n | b.$$

   Dunque n è primo. Il viceversa è ovvio.

5. Sia I un ideale di $\mathbb{Z}$ non nullo. Dimostrare che I è primo $\Leftrightarrow$ I è massimale.

   Soluzione 2.5. *Usiamo la seguente caratterizzazione degli ideali massimali:*

   $$I \text{ è massimale } \Leftrightarrow R/I \text{ è un campo.}$$

   Grazie all'esercizio 4 sappiamo che I è primo non nullo $\Leftrightarrow I = p\mathbb{Z}$ con p primo. Dunque

   $$\mathbb{Z}/I = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ è un campo} \Rightarrow I \text{ è massimale.}$$

   Il viceversa è sempre vero, ogni ideale massimale è primo.

6. *Teorema Cinese dei resti* Siano $I_1, \cdots, I_n$ ideali di R, anello commutativo con identità, tali che $I_i + I_j = R$ per ogni $i \neq j$. Siano $x_1, \cdots, x_n \in R$, allora esiste $x \in R$ tale che $x \equiv x_i \mod I_i$. Verificare che per $R = \mathbb{Z}$ si ottiene l'usuale teorema cinese dei resti.

   Soluzione 2.6. *Dimostriamolo per induzione. Se $n = 2$, abbiamo*

   $$1 = a_1 + a_2$$

   per qualche elemento $a_i \in I_i$, e poniamo $x = x_2 a_1 + x_1 a_2$. Per $i \geq 2$, possiamo trovare degli elementi $a_i \in a_1$ e $b_i \in a_i$ tali che

   $$1 = a_i + b_i, \ \forall i \geq 2.$$

   Il prodotto $\prod_{i=2}^n a_i + b_i$ è uguale ad 1, e vive in $I_1 + \prod_{i=2}^n I_i$. Dunque

   $$I_1 + \prod_{i=2}^n I_i = A.$$

   Grazie al teorema per $n = 2$, esiste $y_1 \in A$ tale che

   $$y_1 \cong 1 \mod I_1 \qquad (1)$$
   $$y_1 \cong 0 \mod \prod_{i=2}^n I_i \qquad (2)$$

   Per induzione esistono $y_2 \cdot y_n$ tali che

   $$y_i \cong 1 \mod I_i \qquad (3)$$
   $$y_i \cong 0 \mod I_j \, i \neq j. \qquad (4)$$

   Allora $x = x_1 y_1 + \cdot + x_n y_n$ è l'elemento cercato.

7. Consideriamo

   (a) $\mathbb{Z}_{30}$ e $R = \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\right\} \subset \mathbb{Z}_{30}$.

   (b) $\mathbb{Z}_{20}$ e $R = \left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}\right\} \subset \mathbb{Z}_{20}$.

   Verificare, in entrambi i casi, se R è un sottoanello, ha divisori dello zero, ed è un campo. Trovare un anello ad esso isomorfo.

   Soluzione 2.7. *(a) $\left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\right\}$ è un sottoanello, non ha divisori dello zero, è un campo ed è isomorfo a $\mathbb{Z}_5$.*

   (b) $\left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}\right\}$ è un sottoanello, ha divisori dello zero $10 * 10 = 100 = 0 \mod 20$, dunque non è un campo ed è isomorfo $\mathbb{Z}_4$.

3 Anelli e Anelli di polinomi

1. Dimostrare che se R un anello commutativo con identità, anche $R[x]$ lo è

   Soluzione 3.1. *$R[x]$ è commutativo se $\forall\ p(x)$ e $q(x) \in R[x]$ si ha $p(x)q(x) = q(x)p(x)$. Per semplicità consideriamo $p(x) = ax + b$ e $q(x) = cx + d$ allora*

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (ax+b)(cx+d) \\ &= acx^2 + (ad+bc)x + bd \\ q(x)p(x) &= (cx+d)(ax+b) \\ &= cax^2 + (da+cb)x + db \end{aligned}$$

   poiché R è commutativo si ha $p(x)q(x) = q(x)p(x)$. Il caso generale si ottiene per induzione sul grado dei polinomi p e q.

2. Dimostrare che $R[x_1, \cdots, x_n] = R[x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}]$ con $(i_1, \cdots, i_n)$ una permutazione di $(1, \cdots, n)$

   Soluzione 3.2. *Definiamo*

$$\phi : R[x_1, \cdots, x_n] \to R[x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}]$$

   come $\phi(a) = a$, $\forall\ a \in R$ e $\phi(x_j) = x_{i_j}$,per $j = 1 \cdots n$. Allora ϕ è un isomorfismo, verificarlo, e $R[x_1, \cdots, x_n] = R[x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}]$

3. Dimostrare che l'ideale generato da x in $\mathbb{Z}[x]$ non è massimale; è primo ?

   Soluzione 3.3. *Usiamo la seguente caratterizzazione degli ideali primi e degli ideali massimali:*

$$I \text{ è primo} \Leftrightarrow R/I \text{ è un dominio.}$$

$$I \text{ è massimale} \Leftrightarrow R/I \text{ è un campo.}$$

   Allora

$$\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$$

   Poichè $\mathbb{Z}$ è un dominio ma non un campo, (x) è primo ma non massimale. La non massimalità si può vedere direttamente osservando che $(x) \subset (x) + I$ con I un qualsiasi ideale di $\mathbb{Z}$

4. Dimostrare che l'ideale generato da x in $\mathbb{R}[x]$ è massimale.

Soluzione 3.4. *Usiamo la seguente caratterizzazione degli ideali massimali:*

$$I \text{ è massimale} \Leftrightarrow R/I \text{ è un campo.}$$

Allora

$$\mathbb{R}[x]/(x) \cong \mathbb{R}$$

Poichè $\mathbb{R}$ *è un campo,* (x) *è massimale.*

5. Trovare una condizione necessaria e sufficente affinché l'ideale generato da x sia massimale in $R[x]$.

   Soluzione 3.5. *Condizione necessaria e sufficente affinche* (x) *sia massimale è che* R *sia un campo.*

6. Trovare una condizione necessaria e sufficente affinché l'ideale generato da x sia primo in $R[x]$.

   Soluzione 3.6. *Condizione necessaria e sufficente affinche* (x) *sia primo è che* R *sia un dominio.*

4 Omomorfismi e Quozienti

1. Consideriamo l'applicazione

   $$\pi_0 : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$$

   definita da

   $$\pi_0(f(x)) = f(0)$$

   Verificare che π_0 è un omomorfismo di anelli per ogni $a \in \mathbb{C}$. Trovare il nucleo, l'immagine.

   Soluzione 4.1.

2. Consideriamo l'applicazione

   $$\pi_1 : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$$

   definita da

   $$\pi_1(f(x)) = f(1)$$

   Verificare che π_1 è un omomorfismo di anelli per ogni $a \in \mathbb{C}$. Trovare il nucleo, l'immagine.

   Soluzione 4.2.

3. Per ogni $a \in \mathbb{C}$ consideriamo l'applicazione
$$\pi_a : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$
definita da
$$\pi_a(f(x)) = f(a)$$
Verificare che π_a è un omomorfismo di anelli per ogni $a \in \mathbb{C}$. Trovare il nucleo, l'immagine.

Soluzione 4.3.

4. Sia $a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, consideriamo l'applicazione
$$p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[i]$$
definita da
$$p(a_n x^n + \cdots + a_0) = a_n(i)^n + \cdots a_0$$
Verificare se p è un omomorfismo di anelli. Trovare il nucleo, l'immagine.

Soluzione 4.4.

5. Sia R un anello con identità 1 e ϕ un omomorfismo di anelli di R su R', dimostrare che $\phi(1)$ è l'unità di R'.

Soluzione 4.5.

6. Consideriamo $I =< x >$ ideale di $\mathbb{Q}[x]$. Determinare il quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$

Soluzione 4.6.

7. Consideriamo $I =< x^2 + 1 >$ ideale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare il quoziente $\mathbb{R}[x]/I$

Soluzione 4.7.