Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi
Prova di Esame - Appello C
13 Giugno 2005

Soluzione

1. Sia G il gruppo delle unità dell'anello $\mathbb{Z}_{20}$. Verificare che $[9]_{20} \in G$ e stabilire se il gruppo quoziente $\dfrac{G}{[9]_{20}G}$ è ciclico.

   Soluzione

   Ricordiamo che, in generale, si ha

$$[a]_n \in U(\mathbb{Z}_n) \Leftrightarrow mcd(a,n) = 1$$

   Allora è facile vedere che $mcd(9,20) = 1$. Quindi $[9]_{20} \in G$.

   Notiamo che

$$G = \{[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}, [11]_{20}, [13]_{20}, [17]_{20}, [19]_{20}\}$$

   e

$$[9]_{20} G = \{[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}\}$$

   Dunque $\#|G/[9]_{20}G| = 2$, quindi $G/[9]_{20}G \cong \mathbb{Z}_2$ ed è ciclico.

2. Siano Q il gruppo delle unità dei quaternioni e K il gruppo di Klein. Determinare un omomorfismo non nullo di gruppi $f : Q \longrightarrow K$.

   Soluzione

   Ricordiamo che

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\},$$

   con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$ e $ki = j$, e

$$K = \{1, a, b, c\},$$

   con $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ e $ab = c$.

   Dalla teoria sappiamo che, il nucleo di f è un sottogruppo normale di Q. Possiamo scegliere, per esempio, $N = \{1, -1\}$. Poiché N è il centro di Q, N è un sottogruppo normale.

   Consideriamo

$$\pi : Q \to Q/N$$

   l'applicazione quoziente. Definiamo $g : Q/N \to K$ come $g(\bar{i}) = a$, $g(\bar{j}) = b$ e $g(\bar{k}) = c$. Allora è facile vedere che g è un isomorfismo di gruppi. Quindi possiamo definire $f = g \circ \pi$.

3. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ l'anello degli interi di Gauss.

   (a) Verificare che l'applicazione
   $$\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2 \text{ definita da } \phi(a + bi) = [a + b]_2$$
   è un omomorfismo suriettivo di anelli.

   (b) Determinare un generatore di $Ker\phi$ e definire esplicitamente un isomorfismo
   $$\frac{\mathbb{Z}[i]}{Ker\phi} \to \mathbb{Z}_2.$$

Soluzione

(a) Semplice verifica della definizione.

(b) Ricordiamo che $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio euclideo, quindi è un anello ad ideali principali. Dunque $\ker\phi$ è generato da un solo elemento.

Si ha che
$$\phi(a + bi) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \mod 2,$$
quindi
$$\ker\phi = \{a + bi : a + b = 0 \mod 2\}\,.$$
Ricordiamo che in un dominio euclideo gli ideali sono generati da elementi norma minima. Notiamo che $1 + i \in \ker\phi$ e che $N(1 + i) = 2$, quindi $1 + i$ ha norma minima (gli elementi di norma 1 sono invertibili), dunque
$$\ker\phi = (1 + i)\,.$$
Quindi possiamo definire $\psi : \frac{\mathbb{Z}[i]}{\ker\phi} \to \mathbb{Z}_2$ nel modo seguente $\psi(\overline{0}) = 0$ e $\psi(\overline{1}) = 1$.

4. Sia $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2}$.

   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$;
   (b) Descrivere gli elementi del campo $\mathbb{Q}(\alpha)$;
   (c) Determinare una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$;
   (d) Calcolare l'inverso di α in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   Soluzione

   (a) Determiniamo il polinomio minimo di α,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt[3]{2} \\ \alpha - 1 &= \sqrt[3]{2} \\ (\alpha - 1)^3 &= 2 \\ \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 &= 2 \\ \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 3 &= 0. \end{aligned}$$

   Quindi α è soluzione di $p(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 3 = 0$. Verifichiamo che $p(X)$ è il polinomio minimo. Per fare questo basta verificare che $p(X)$ è irriducibile. Poiché $p(X)$ ha grado 3 e non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$, $p(X)$ è irriducibile e dunque è minimo.

   (b) Per definizione si ha

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{a + b\alpha + c\alpha^2 : a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha^3 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 3\right\}.$$

   (c) Da 4b si ha che una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$ è data da $\{1, \alpha, \alpha^2\}$.

   (d) Consideriamo

$$\alpha(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 1$$

   Semplificando otteniamo

$$(b + 3a)\alpha^2 + (c - 3a)\alpha + 3a = 1$$

   Dunque

$$\begin{cases} b + 3a = 0, \\ c - 3a = 0, \\ 3a = 1. \end{cases}$$

   Quindi l'inverso di α in $\mathbb{Q}(\alpha)$ è $\frac{1}{3}\alpha^2 - \alpha + 1$.