Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Seconda prova di valutazione intermedia
11 gennaio 2005

*Cognome*___________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte.Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Sia $A = \left\{ \frac{a}{b} : \ a, \ b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \text{ e } 5 \not| b \right\}$

   (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

   (b) Determinare gli elementi invertibili di A.

   (c) Sia $\phi : A \to \mathbb{Z}_5$ definita da

   $$\phi\left(\frac{a}{b}\right) = \overline{a}\overline{b}^{-1}.$$

   Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di anelli e applicare il teorema di omomorfismo.

   (d) (*facoltativo*) Usando il punto 1b, mostrare che $\ker \phi$ è l'unico ideale massimale di A

2. Sia $p(X) = X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$:

   (a) Dimostrare che $K = \mathbb{Z}_7[X] / (p(X))$ è un campo.

   (b) Descrivere esplicitamente gli elementi di K.

   (c) Determinare l'inverso di $X^3 + \overline{5}X + \overline{6} + (p(X))$ in K.

3. Sia $\alpha = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$.

   (a) Mostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.
   (b) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(i)$.
   (c) Costruire il campo $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ e determinare una sua base su $\mathbb{Q}$ come spazio vettoriale.

4. Dimostrare che in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ l'elemento $\alpha = 10$ ha due fattorizzazioni distinte in elementi irriducibili non associati.