**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005**
**AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi**
**Prima prova di valutazione intermedia**
3 novembre 2004

*Cognome*___________________ *Nome*_____________________

*Numero di matricola*__________________

**Avvertenza:** Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

**Avvertenza:** Risolvere *completamente ed in modo corretto* l'Esercizio n. 1 è condizione *sufficiente* per essere ammessi alla seconda prova intermedia.

1. Sia $G$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi in $\mathbb{Z}_8$ della forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ con } ad = 1.$$

   (a) Mostrare che $G$ è un gruppo commutativo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne;

   (b) Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \text{ definita da } A \to a$$

   è un omomorfismo di gruppi;

   (c) Determinare $Ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$ e definire l'isomorfismo canonico

$$G/Ker(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi);$$

   (d) Determinare $\varphi^{-1}(\bar{5})$.

2. Sia $C_{12}$ il gruppo delle radici complesse dodicesime dell'unità.

   (a) Determinare il gruppo $Aut(C_{12})$ degli automorfismi di $C_{12}$;

   (b) Stabilire se $Aut(C_{12})$ è un gruppo ciclico.

3. Determinare le possibili strutture cicliche e gli ordini degli elementi del gruppo alterno di grado sette $\mathbf{A_7}$.

4. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ si definisca l'operazione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Mostrare che rispetto a questa operazione $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico e determinate tutti i suoi generatori.

5. Sia $G$ un gruppo moltiplicativo e $N$ un sottogruppo normale di $G$ di indice $m$. Mostrare che, per ogni $g \in G$, $g^m \in N$.