**Università degli studi di Roma Tre**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005**
**AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi**
**Esercizi**
10 dicembre 2004

# 1 Polinomio minimo e ampliamenti

1. Determinare il polinomio minimo di $z$ sul campo $K$
   (a) $z = 2 + i$, $K = \mathbb{Q}$.
   (b) $z = \sqrt{2} + 2i$, $K = \mathbb{Q}$.
   (c) $z = 2i$, $K = \mathbb{Q}$.
   (d) $z = \pi + i$, $K = \mathbb{R}$.
   (e) $z = \sqrt{3}$, $K = \mathbb{Q}$.
   (f) $z = \sqrt[3]{6}$, $K = \mathbb{Q}$.

2. Costruire esplicitamente i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$.
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{8})$.
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.
   - $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7})$.

3. Dimostrare che per ogni $d \in Q$ i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$ sono isomorfi:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
   (b) $\mathbb{Q}(a + b\sqrt{d})$.
   (c) $\mathbb{Q}(c\sqrt{d})$.

   Per ogni $a$, $b$ e $c \in \mathbb{Q}$.

# 2 Campi di spezzamento

1. Sia $f(X)$ un polinomio di grado $n$ su $\mathbb{Z}_p$ e sia $\alpha$ una sua radice (in un opportuno ampliamento di $\mathbb{Z}_p$). Mostrare che le radici di $f(X)$ sono:
   $$\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}}.$$
   Dedurne che se $m(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}_p$, allora $m(X)$ ha tutte le sue radici in $\dfrac{\mathbb{Z}_p[X]}{(m(X))}$.

2. Determinare un campo contenente $\mathbb{Z}_3$ in cui il polinomio $X^4 + 2X^3 + 2X + 2$ ha tutte le sue radici.

3. Determinare il campo di spezzamento dei seguenti polinomi sul campo $K$.

   (a) $x^2 - 2$, $K = \mathbb{Q}$
   (b) $x^4 + 5x^2 - 6$, $K = \mathbb{Q}$
   (c) $2x^2 - 6$, $K = \mathbb{Q}$
   (d) $x^4 + 2$, $K = \mathbb{Q}$
   (e) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$
   (f) $x^5 - 4x^4 + 12x^2 - 4x - 8$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

# 3 Numeri algebrici

1. Dimostrare che $\cos(1°) + i\sin(1°)$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, dove $1° = \frac{2\pi}{360}$

2. In generale dimostrare che $\cos(m°) + i\sin(m°)$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ per ogni intero $m$

# 4 Campi Finiti

1. Sia $F$ un campo con un numero finito $q$ di elementi

   (a) Dimostrare che esiste un numero primo $p$ tale che

   $$pa = \underbrace{a + \cdots + a}_{p-volte} = 0$$

   per ogni $a \in F$.

   (b) Dimostrare che $q = p^n$ per un certo intero $n$.
   (c) Se $a \in F$, dimostrare che $a^q = a$.
   (d) Se $b \in K$ è algebrico su $F$, dimostrare che $b^{q^m} = b$ per qualche intero $m > 0$.

2. Sia $F$ un campo con $p^n$ elementi, provare che esiste un polinomio $q$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ tale che $F \cong \mathbb{Z}_p[x] / (q)$.

3. Costruire un campo, se possibile, con le seguenti cardinalità: 3, 6, 16, 27, 32, 144, 256, 3125.

## 5 Irriducibilità

Trovare le componenti irriducibili di $f(x)$ in $K[x]$, con $K = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8$
2. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$
3. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$
4. $f(x) = x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1$