Universit degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
8 ottobre 2004

1 Sottogruppi

1. Quali sono le condizioni perché un sottoinsieme di un gruppo sia un sottogruppo?.

2. Se H e K sono sottogruppi di G allora HK è un sottogruppo di G se e solo se $HK = KH$.

3. Siano H e K due sottogruppi finiti di G, sia $|HK|$ la cardinalità di HK come insieme allora
$$|HK| = \frac{Ord(H)Ord(K)}{Ord(H \bigcap K)}. \tag{1}$$

4. Sia H un sottogruppo di G, sia $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$, dimostrare che aHa^{-1} è un sottogruppo di G. Se G è finito calcolare $Ord(aHa^{-1})$.

5. Scrivere esplicitamente le classi laterali destre di H in G dove:
   (a) $G = (a)$ è un gruppo ciclico di ordine 10 e $H = (a^2)$
   (b) G come sopra e $H = (a^5)$.

6. Sia $a \in G$, definiamo $C(a) = \{x \in G : xa = ax\}$. Dimostrare che $C(a)$ è un sottogruppo di G. $C(a)$ si chiama il centralizzante di a in G.

7. Sia H un sottogruppo di G, definiamo $C(H) = \{x \in G : xh = hx \, \forall h \in H\}$. Dimostrare che $C(H)$ è un sottogruppo di G. $C(H)$ si chiama il centralizzante di H in G.

8. Sia H un sottogruppo di G, definiamo $N(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$. Dimostrare che $N(H)$ è un sottogruppo di G e che $N(H) \supseteq H$. $N(H)$ si chiama il normalizzante di H in G.

2 Sottogruppi normali.

1. *Lemma della farfalla* Siano U e V due sottogruppi di un gruppo G, siano H e K sottogruppi normali di U e V, rispettivamente. Allora
   (a) $H(U \cap K)$ è normale in $H(U \cap V)$
   (b) $(H \cap V)K$ è normale in $(U \cap V)K$

e i gruppi quozienti sono isomorfi, i.e.

$$H(U \cap V)/H(U \cap K) \cong (U \cap V)K/(H \cap V)K.$$

2. *Sottogruppo derivato* Sia G un gruppo. Consideriamo $U = \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$, il sottogruppo generato da U si chiama sottogruppo dei commutatori, o derivato, e si denota con G'. Dimostrare che:
   (a) G' è normale in G
   (b) G/G' è commutativo
   (c) Se G/N è commutativo allora $N \supset G'$
   (d) Se H è un sottogruppo di G e $H \supset G'$, allora H è normale in G.

3 Omomorfismi e sottogruppi normali.

1. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine m. Sia n primo con m. Dimostrare che ogni $g \in G$ si può scrivere come $g = x^n$ con $x \in G$, i.e. esiste $x \in G$ tale che $x^n = g$.
2. Trovare tutti gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_{18}$ e $\mathbb{Z}_{12}$
3. Trovare tutti gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_{7}$ e $\mathbb{Z}_{13}$
4. Trovare tutti gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_{14}$ e $\mathbb{Z}_{6}$
5. Trovare tutti gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_{42}$ e $\mathbb{Z}_{21}$
6. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (\mathbb{Z}, +)$ definita da $f_n(x) = nx$. Verificare che f_n è un omomorfismo, trovare il nucleo e l'immagine di f_n.
7. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (\mathbb{Z}_m, +)$ definita da $f_n(x) = nx \mod m$.
   (a) Per quali n, f_n è un omomorfismo di gruppi.
   (b) Per tali n trovare il nucleo e l'immagine di f_n.

4 Gruppo Simmetrico.

1. Calcolare i seguenti prodotti:
   - (123)(25)(367)
   - (45)(2378)(4765)(78)
   - (345)(1234)(34)
   - (123)(67)(45)
2. Determinare i sottogruppi normali di S_3 e S_4.

3. Determinare il centro di S_3 e S_4.

4. Determinare il centralizzante di:

   (a) $\langle id, (12) \rangle$ in S_3

   (b) $\langle id, (12) \rangle$ in S_4

   (c) $\langle id, (12), (123) \rangle$ in S_4.

5. Determinare il normalizzante di:

   (a) $\langle id, (12) \rangle$ in S_3

   (b) $\langle id, (12) \rangle$ in S_4

   (c) $\langle id, (12), (123) \rangle$ in S_4.

6. $\star$[1] Consideriamo una scatola quadrata piatta riempita con 16 quadrati piatti di metallo, numerati come nella figura seguente:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

L'ultimo quadrato viene rimosso, rendendo possibile lo spostamento degli altri quadrati facendoli scivolare. Si consideri una sequenza qualsiasi di spostamenti che termini con l'angolo destro inferiore libero. Dimostrare che le permutazioni possibili per tali spostamenti sono solamente le permutazioni pari in A_{15}. Esempio:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

3	6	7	8
9	2	1	4
5	10	13	14
12	11	15	

è una configurazione finale ammissibile.

5 Matrici.

1. Consideriamo l'applicazione determinante:

$$\det : (Gl_2(\mathbb{C}), *) \mapsto (\mathbb{C}^*, *)$$

provare che è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo, l'immagine e scrivere la relazione di equivalenza generata. Il nucleo si chiama $Sl_2(\mathbb{C})$.

[1]Gli esercizi con $\star$ non avranno soluzione

2. Consideriamo l'applicazione traccia:

$$tr : (M_2(\mathbb{C}), +) \mapsto (\mathbb{C}, +)$$

provare che è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo, l'immagine e scrivere la relazione di equivalenza generata.

6 Numeri Complessi e radici dell'unità

1. Sia H il gruppo delle radici cubiche dell'unità, dimostrare che

$$\mathbb{C}^*/H \cong \mathbb{C}^*.$$

2. Verificare che l'applicazione $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, tale che $\phi(z) = z^n$, è un omomorfismo e determinare il nucleo e l'immagine.