Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi
Prova di Esame - Appello C
13 Giugno 2005

*Cognome*__________________ *Nome*____________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Sia G il gruppo delle unità dell'anello $\mathbb{Z}_{20}$. Verificare che $[9]_{20} \in G$ e stabilire se il gruppo quoziente $\dfrac{G}{[9]_{20}G}$ è ciclico.

2. Siano Q il gruppo delle unità dei quaternioni e K il gruppo di Klein. Determinare un omomorfismo non nullo di gruppi $f : Q \longrightarrow K$.

3. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ l'anello degli interi di Gauss.

   (a) Verificare che l'applicazione

   $$\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2 \text{ definita da } \phi(a + bi) = [a + b]_2$$

   è un omomorfismo suriettivo di anelli.

   (b) Determinare un generatore di $Ker\phi$ e definire esplicitamente un isomorfismo

   $$\frac{\mathbb{Z}[i]}{Ker\phi} \to \mathbb{Z}_2.$$

4. Sia $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2}$.

   (a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$;

   (b) Descrivere gli elementi del campo $\mathbb{Q}(\alpha)$;

   (c) Determinare una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$;

   (d) Calcolare l'inverso di α in $\mathbb{Q}(\alpha)$.