Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2004/2005
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 5

1. Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 280\mathbb{Z}$ e $J = 60\mathbb{Z}$. Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

2. Si considerino in $\mathbb{Q}[X]$ gli ideali $I = (f(X))$ e $J = (g(X))$, dove
$$f(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1 \text{ e } g(X) = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2.$$
Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

3. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$ e stabilire quali tra essi sono massimali.

Determinare inoltre la struttura degli anelli quoziente $\dfrac{\mathbb{Z}_{60}}{\bar{5}\mathbb{Z}_{60}}$ e $\dfrac{\mathbb{Z}_{60}}{\overline{15}\mathbb{Z}_{60}}$. Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

4. Determinare tutti gli ideali dell'anello prodotto diretto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
Stabilire inoltre quali di essi sono primi o/e massimali.

5. Sia $A := \{a/b \in \mathbb{Q}\,;\, a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \text{ e } 3 \text{ non divide } b\}$.
Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ e che l'anello quoziente $A/3A$ è un campo isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

6. Si consideri l'applicazione
$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \text{ definita da } a \to ([a]_3, [a]_7)$$
Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli, determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed applicare il Teorema di omomorfismo per gli anelli.

7. Sia A l'anello delle applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dotato delle operazioni di somma e prodotto definite puntualmente, cioè:
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)\ ;\ (fg)(x) := f(x)g(x)\ ,$$
per ogni x in $\mathbb{R}$. Sia inoltre a un numero reale fissato.

Mostrare che l'insieme $I_a = \{f \in A : f(a) = 0\}$ è un ideale massimale di A (Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \to f(a)$).

8. Determinare per quali valori di n l'ideale (n, X) è primo o/e massimale in $\mathbb{Z}[X]$.

9. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :
(a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;
(c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.
Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

10. Sia $R := \mathbb{Q}[X]/I$, dove $I := (X^2 - 5X + 6)$.
Stabilire se i seguenti elementi di R sono invertibili e, in caso affermativo, determinarne l'inverso:

$$(X - 1) + I\,;\ (2X - 1) + I\,;\ (X - 3) + I\,.$$

11. Studiare l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2 + aX + \bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.
Determinare inoltre tutti gli ideali di A nel caso in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.

12. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.
Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.

13. Sia $f(X) = X^3 + \bar{2}X^2 + \bar{4}X + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Mostrare che l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(f(X))}$ è un campo con un numero finito di elementi e determinare esplicitamente tali elementi (in forma generica).
Determinare inoltre l'inverso della classe di $g(X) = X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{7}X + \bar{3}$.

14. Sia $a \in \mathbb{C}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli

$$v_a : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, f(X) \to f(a)\ .$$

Determinare esplicitamente il nucleo e l'immagine di v_a quando

$$a = 3\sqrt{4}\,,\ a = 3 + 2i\,,\ a = e\,,\ a = \sqrt{\pi + 1}.$$

In quali casi $\mathrm{Im}(v_a)$ è un campo?

15. Sia K un campo e sia $A = \frac{K[X,Y,Z]}{I}$, dove I è l'ideale principale di $K[X, Y, Z]$ generato dal polinomio $XY - Z^2$.
Mostrare che gli elementi X, Y e Z sono primi in $K[X, Y, Z]$, mentre le classi di X, Y e Z sono elementi irriducibili ma non primi in A.

16. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.