Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2004/2005
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 3

1. Sia D_6 il gruppo delle isometrie dell'esagono regolare. Mostrare che D_6 è isomorfo al sottogruppo di $\mathbf{S}_6$ generato da $\delta = (26)(35)$ e $\rho = (123456)$.

2. Mostrare che, per ogni radice primitiva n-sima dell'unità ζ, l'applicazione $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (C^*, \cdot)$ definita da $k \longrightarrow \zeta^k$ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo.

3. Siano A un insieme e $(G, \cdot)$ un gruppo. Indichiamo con $\mathcal{F}(A, G)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow G$.

   Mostrare che:

   (a) $(\mathcal{F}(A, G), \cdot)$ è un gruppo con l'operazione definita nel seguente modo: se $f, g \in \mathcal{F}(A, G)$, allora $fg : A \longrightarrow G$ è l'applicazione definita da
   $$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

   (b) Se G è finito, ogni $f \in \mathcal{F}(A, G)$ ha ordine finito.

4. Se $(G, +)$ e $(G', +)$ sono gruppi commutativi, allora il sottoinsieme $\mathrm{Hom}(G, G')$ di $\mathcal{F}(G, G')$ costituito da tutti gli omomorfismi di G in G' è un gruppo commutativo rispetto all'operazione *somma puntuale* definita da
   $$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$
   (ed è un sottogruppo di $(\mathcal{F}(G, G'), +)$).

5. (facoltativo) Si consideri l'applicazione
   $$\alpha : (\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \longrightarrow \mathbb{Z}_m; \quad \phi \longrightarrow \phi([1]_n).$$

   Mostrare che:

   (a) α è un omomorfismo di gruppi iniettivo;

(b) $\mathrm{Im}(\alpha)$ è il sottogruppo di $\mathbb{Z}_m$ generato da $[m/d]_m$, dove $d = MCD(n,m)$.

Dedurne che $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +)$ è un gruppo ciclico di ordine $d = MCD(n,m)$.

6. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{21}), +)$ e $(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{30}), +)$.

7. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di $Aut(\mathbb{Z}_{24})$.

8. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$, per ogni $\alpha \in Aut(G)$.

   Mostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale. Mostrare inoltre che un gruppo di Klein non ha sottogruppi caratteristici.

9. Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

10. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

11. Verificare che $\alpha \circ \gamma_g \circ \alpha^{-1} = \gamma_{\alpha(g)}$, per ogni $\gamma_g \in Int(G)$ e $\alpha \in Aut(G)$.

    Dedurne che $Int(G)$ è un sottogruppo normale di $Aut(G)$.

12. Mostrare che la relazione di coniugio in un gruppo è una relazione di equivalenza.

    Determinare esplicitamente le classi di coniugio di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4.

13. Sia G un gruppo e sia $x \in G$ un elemento fissato. Mostrare che l'insieme $C(x) = \{g \in G \mid xg = gx\}$ è un sottogruppo di G (tale gruppo si dice il *centralizzante* di x in G). Mostrare inoltre che $Z(G) = \cap_{x \in G} C(x)$.

14. Siano G un gruppo, $x \in G$ un elemento fissato e $C(x) = \{g \in G \mid xg = gx\}$ il centralizzante di x. Mostrare che $g^{-1}xg = h^{-1}xh$ se e soltanto se $hg^{-1} \in C(x)$.

    Dedurne che, se G è finito, il numero dei coniugati di x divide l'ordine di G.

15. Mostrare che in un gruppo due elementi coniugati hanno lo stesso ordine.