Capitolo 7

Valutazioni discrete

Definizione 7.1. Una valutazione si dice *discreta* se il suo gruppo di valori è un gruppo ciclico infinito (cioè, isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$).
Una valutazione discreta si dice *normalizzata* se il suo gruppo di valori è esattamente $(\mathbb{Z}, +)$.

Osservazioni 7.2. (a) Sia E un'estensione di un campo K. Se w è una valutazione di E tale che $w\mid_K$ è una valutazione discreta, allora w è una valutazione discreta (cfr. Corollario 5.3).

(b) Sia v una valutazione discreta di un campo K e sia $(A_v, \mathfrak{m}_v)$ l'anello di valutazione associato a v. Allora, esiste sempre un elemento $t \in \mathfrak{m}_v$ tale che $v(t)$ è un generatore del gruppo dei valori di v. Un tale elemento è detto *parametro locale o uniformizzante* della valutazione v (ovvero, dell'anello di valutazione A_v ovvero, dell'ideale massimale $\mathfrak{m}_v$).

(c) Si noti che un parametro locale t è un elemento di K tale che $v(t)$ è il generatore positivo del gruppo dei valori della valutazione discreta v. (Infatti come gruppo ciclico infinito $(\Gamma, +)$ ha due generatori, i quali corrispondono nell'isomorfismo di Γ con $\mathbb{Z}$ a ± 1. Essendo Γ un gruppo totalmente ordinato, uno soltanto di questi due generatori è positivo.)

(d) Se t è un parametro uniformizzante di v e se $t' \in \mathfrak{m}_v$ è un altro parametro uniformizzante, cioè $v(t')$ è un generatore del gruppo dei valori di v, allora $v(t) = v(t')$ (per l'unicità del generatore positivo). Pertanto $v(t^{-1}t') = 0$, cioè $t^{-1}t' = \tilde{u} \in \mathcal{U}(A_v)$, ovvero $t' = \tilde{u}t$.

Proposizione 7.3. *Sia v una valutazione discreta di K e sia t un parametro locale per v. Preso comunque $z \in K$, $z \neq 0$, z si può scrivere in modo unico nella forma seguente:*

$$z = ut^r \quad \textit{con } r \in \mathbb{Z},\ u \in \mathcal{U}(A_v).$$

Dimostrazione. Infatti,

$$v(z) = r \cdot v(t) = v(t^r)$$

per un qualche $r \in \mathbb{Z}$. Dunque:

$$v(zt^{-r}) = 0$$

cioè:

$$zt^{-r} = u \in \mathcal{U}(A_v).$$

Se, poi, $t' \in \mathfrak{m}_v$ è un altro parametro locale e se

$$z = u't^s \quad \text{con } u' \in \mathcal{U}(A_v),\ s \in \mathbb{Z}$$

allora

$$sv(t') = v(u') + sv(t') = v(u't'^s) = v(z) = v(ut^r) = v(u) + rv(t) = rv(t)$$

e quindi $s = r$ (Osservazioni 7.2 (d)). Da cui segue che $z = u't'^r = u't^r$. Essendo $t' = \tilde{u}t$, per $\tilde{u} \in \mathcal{U}(A_v)$, allora $z = u'\tilde{u}^r t^r = ut^r$. □

Definizione 7.4. Si dice *ordine di un elemento* $z \in K$, $z \neq 0$, *rispetto ad una valutazione discreta* v definita su K, l'intero $r \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$z = ut^r$$

dove t è un uniformizzante ed $u \in \mathcal{U}(A_v)$. (Si noti che r non dipende dalla scelta dell'uniformizzante per la Proposizione 7.3). In breve, scriveremo:

$$\mathrm{ord}_v(z) = r.$$

Per convenzione poniamo $\mathrm{ord}_v(0) := \infty$.

Osservazioni 7.5. (a) È subito visto che una valutazione discreta è normalizzata se, e soltanto se, $v = \mathrm{ord}_v$. Infatti se $(\Delta, \cdot)$ è il gruppo di valori di v e se $\sigma : \Delta \to \mathbb{Z}$ è l'isomorfismo canonico tra gruppi ciclici ordinati, allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "\mathrm{ord}_v"'] & \Delta_0 \arrow[d, "\sigma^\sharp"] \\ & \mathbb{Z}_\infty \end{tikzcd}$$

$$\text{dove } \sigma^\sharp\ |_\Delta := \sigma,\ \sigma^\sharp(0) := \infty$$

(b) Per comodità, salvo esplicito avviso del contrario, supporremo sempre che ogni valutazione discreta considerata sia normalizzata.

(c) Un elemento $z \in K \setminus \{0\}$ è detto avere uno *zero* (risp. un *polo*) *di ordine* r in una valutazione discreta v (ovvero nel posto P associato a v, ovvero ad A_v) se

$$\mathrm{ord}_v(z) = r \gneq 0 \quad (\text{risp. } \mathrm{ord}_v(z) = -r \lneq 0,\ r > 0)$$

(d) Se t è un uniformizzante per una valutazione v, allora:

$$A_v = \{\, z \in K \mid \mathrm{ord}_v(z) \geq 0\}$$
$$\mathfrak{m}_v = \{\, z \in K \mid \mathrm{ord}_v(z) \gneq 0\} = tA_v$$

dunque t è un elemento irriducibile (o, primo) di A_v. Pertanto dalla Proposizione 7.3 discende che un anello di valutazione discreta è un dominio a fattorizzazione unica (in breve, UFD).

Proposizione 7.6. *Sia A un anello integro. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *Esiste un elemento $t \in A$, t irriducibile, tale che ogni elemento $z \in A \setminus \{0\}$ si può scrivere univocamente nella seguente maniera:*

$$z = ut^r \qquad \text{con} \qquad u \in \mathcal{U}(A),\ r \geq 0;$$

(ii) *A è locale, noetheriano ed il suo ideale massimale è principale;*

(iii) *A è un dominio ad ideali principali (in breve, PID) locale;*

(iv) *A è un dominio euclideo (in breve, ED) locale.*

Dimostrazione. (iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii) sono implicazioni banali.
(ii)$\Rightarrow$(i). Sia $\mathfrak{m} = tA$ l'ideale massimale di A (per evitare casi banali, supponiamo che $\mathfrak{m} \neq (0)$, cioè che A non sia un campo). Se $z \in \mathcal{U}(A)$ allora:

$$z = zt^0$$

Se $z \in A \setminus \mathcal{U}(A)$, $z \neq 0$, allora $z \in \mathfrak{m}$, quindi:

$$z = z_1 t$$

Se $z_1 \in \mathcal{U}(A)$, allora abbiamo finito. Se $z_1 \notin \mathcal{U}(A)$, ripetiamo il ragionamento precedente, quindi:

$$z_1 = z_2 t \quad \text{con } z_2 \in A.$$

In generale, possiamo costruire una successione di elementi $\{\, z_n \in A \mid n \geq 1\}$ in modo tale che:

$$z_n = z_{n+1} t$$

Quindi, avremo una catena ascendente di ideali (principali):

$$(z_1) \subseteq (z_2) \subseteq \cdots \subseteq (z_{n-1}) \subseteq (z_n) \subseteq (z_{n+1}) \subseteq \cdots$$

Avendo supposto A noetheriano, tale catena deve essere stazionaria, dunque per $n \gg 0$, deve accadere che:

$$(z_n) = (z_{n+1}) \quad \text{cioè } z_{n+1} = uz_n,\ u \in \mathcal{U}(A)$$

Se $(z_n) = A$, allora $z_n \in \mathcal{U}(A)$:

$$z = z_1 t = z_2 t^2 = \cdots = z_n t^n$$

Se invece $(z_n) = (z_{n+1}) \subsetneq A$, allora arriviamo ad un assurdo, infatti:

$$z_{n+1} = uz_n \quad \text{e} \quad z_n = z_{n+1} t$$

quindi:

$$z_n = utz_n, \quad \text{ovvero} \quad 1 = ut$$

cioè $t \in \mathcal{U}(A)$, affermazione palesemente assurda.
(i)$\Rightarrow$(iv). Essendo t irriducibile, allora

$$A \setminus \mathcal{U}(A) = tA$$

è un ideale (massimale), dunque A è un anello locale (cfr. Proposizione 1.1, pag. 10). (Altrimenti, si può vedere facilmente e direttamente che (A, tA) è un anello di valutazione, infatti se $z \in K \setminus A$, dove K è il campo dei quozienti di A, allora:

$$z = \frac{a}{b} = ut^{r_a - r_b}$$

dove, $a = u_a t^{r_a} (\neq 0)$, $b = u_b t^{r_b} (\neq 0)$, $u = u_a u_b^{-1} \in \mathcal{U}(A)$, ed inoltre $r := r_a - r_b \lneq 0$, quindi $z^{-1} = u^{-1} t^{-r} \in A$.)
Per dimostrare che A è un dominio euclideo, basta dimostrare che esiste una funzione $\varphi : A \to \mathbb{N}$ tale che:

(a) $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ per ogni coppia di elementi $a, b \in A \setminus \{0\}$;

(b) presi comunque $a, b \in A$, $b \neq 0$, devono esistere $q, r \in A$ in modo tale che $a = qb + r$ con $r = 0$ oppure $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Nel nostro caso poniamo

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z = 0 \\ s, & \text{se } z = ut^s \text{ con } u \in \mathcal{U}(A) \ s \geq 0 \end{cases}$$

per ogni $z \in A$. Ovviamente, in un dominio A soddisfacente la condizione (i), la divisione tra due elementi $a, b \in A$ con $b \neq 0$ e $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ si può sempre effettuare con resto $r = 0$, ponendo $a = \frac{a}{b} \cdot b + 0$. Se invece $\varphi(a) < \varphi(b)$ allora si può effettuare una divisione con il resto del tipo $a = b \cdot 0 + a$ con $q = 0$. $\square$

Definizione 7.7. Chiameremo *anello di valutazione discreta* (in breve, DVR) un anello integro soddisfacente a (ciasc)una delle proprietà equivalenti della Proposizione 7.6 (cfr. anche la successiva Proposizione 7.9).

È chiaro (cfr. Proposizione 7.6, (i) e Proposizione 7.3) che ogni anello associato ad una valutazione discreta è un anello di valutazione discreta. Prima di dare esempi di anelli di valutazione discreta e di anelli di valutazione che non sono di valutazione discreta, dimostriamo alcune proprietà rilevanti dei DVR.

Proposizione 7.8. *Sia $(A, \mathfrak{m} = tA)$ un DVR con campo dei quozienti K. Supponiamo che $A \neq K$, allora:*

(a) *preso comunque un ideale non banale $\mathfrak{a}$ di A, allora deve esistere un intero $r \geq 1$ in modo tale che:*

$$\mathfrak{a} = t^r A$$

(in particolare, ogni ideale è primario, perché potenza dell'ideale massimale);

(b)

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n = (0);$$

(c)

$$\mathrm{Spec}(A) = \{(0)\,, \mathfrak{m}\}\,.$$

Dimostrazione.

(a) Sia $\mathfrak{a}$ un ideale non banale di A, allora per ogni $z \in \mathfrak{a},\ z \neq 0$,

$$z = ut^{n_z} \quad \text{con } u \in \mathcal{U}(A),\ n_z \geq 1.$$

Sia:

$$r := \inf\{n_z \mid z \in \mathfrak{a},\, z \neq 0\}$$

È subito visto che $\mathfrak{a} \subseteq t^r A$ e che $\mathfrak{a} \not\subseteq t^{r+1}A$. Preso comunque $z \in \mathfrak{a}$, $z \neq 0$,

$$z = z_1 t^r \quad \text{con } z_1 \notin tA \quad \text{ovvero } z_1 \in \mathcal{U}(A)$$

quindi $t^r \in \mathfrak{a}$. Donde, si conclude che $\mathfrak{a} = t^r A$.

(b) Tale affermazione è una conseguenza di (a). Infatti, se fosse

$$\bigcap_{n \geq 1} t^n A = \mathfrak{a} \neq (0)$$

allora si avrebbe che $\mathfrak{a} = t^r A$, per qualche $r \geq 1$ e ciò è manifestamente assurdo, in quanto $t^{r+1}A \subsetneq t^r A$.

(c) Basta osservare che $t^r A$ è un ideale primo se, e soltanto se, $r = 1$. □

Proposizione 7.9. *Sia* $(A, \mathfrak{m} = tA)$ *un DVR e sia* K *il suo campo dei quozienti. A meno di equivalenze, esiste un'unica valutazione discreta* v *di* K *in modo tale che* $(A_v, \mathfrak{m}_v) = (A, \mathfrak{m})$ *(in altre parole esiste un'unica valutazione discreta normalizzata,* ord_A*, in corrispondenza di ciascun anello di valutazione discreta).*

Dimostrazione. L'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ord}_A : K & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\infty \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \infty, & \text{se } z = 0 \\ r, & \text{se } z = ut^r \text{ con } u \in \mathcal{U}(A),\, r \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}$$

definisce una valutazione discreta normalizzata avente come anello associato esattamente il DVR A assegnato. □

Esempi 7.10.

1. Sia k un campo, e sia $a \in k$.

$$\mathcal{O}_a = k\,[X]_{(X-a)}$$

è un DVR avente come uniformizzante $X - a$.

2. Sia k un campo.

$$\mathcal{O}_\infty = k\left[\frac{1}{X}\right]_{\left(\frac{1}{X}\right)}$$

è un DVR avente come uniformizzante $\frac{1}{X}$.
1. e 2. sono DVR aventi come campo dei quozienti il campo delle funzioni razionali in una indeterminata $k\,(X)$.

3. Sia k un campo. L'anello di serie $k[\![X]\!]$ è un DVR, avente come uniformizzante X. Il campo dei quozienti di tale DVR è il campo delle serie formali di Laurent:

$$k(\!(X)\!) = \left\{ \sum_{n=-N}^{\infty} a_n X^n \,\middle|\, N \geq 0,\, a_n \in k \right\}.$$

4. L'anello locale $\mathbb{Z}_{(p)}$, con p numero primo di $\mathbb{Z}$, è un DVR, con campo dei quozienti $\mathbb{Q}$, ed uniformizzante p.

5. Sia k un campo. L'anello locale noetheriano:

$$k[X, Y]_{(X, Y)}$$

o, più generalmente:

$$k[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)} \qquad n \geq 2$$

non è un DVR (non è neanche un anello di valutazione) perché non è un PID. Per la stessa ragione, l'anello locale noetheriano

$$k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$$

non è un DVR.

6. Sia k un campo. Gli anelli

$$k(Y)[X]_{(Y)} \quad \text{e} \quad k(X)[Y]_{(X)}$$

sono DVR (aventi come campo dei quozienti $k(X, Y)$) ed uniformizzanti rispettivamente Y e X.

7. Sia k un campo. Gli anelli:

$$\begin{aligned} V_1 &:= k[X]_{(X)} + Yk(X)[Y]_{(Y)} \\ V_2 &:= k[Y]_{(Y)} + Xk(Y)[X]_{(X)} \end{aligned}$$

sono anelli di valutazione di $k(X, Y)$, ma non sono anelli di valutazione discreta. I loro ideali massimali non sono principali:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &:= Xk[X]_{(X)} + Yk(X)[Y]_{(Y)} \\ \mathfrak{m}_2 &:= Yk[Y]_{(Y)} + Xk(Y)[X]_{(X)} \end{aligned}$$

Osserviamo che tutti gli anelli di valutazione sopra considerati, tranne l'Esempio 4, godono della seguente proprietà:

(G) Esiste un campo k, $k \subseteq A$, tale che l'omomorfismo composto:

$$k \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}} = k(A)$$

è un isomorfismo (tale proprietà viene anche descritta dicendo che k *è un retratto di* A).

Osservazione 7.11. Dato un campo k ed una k-algebra A che è anche un anello di valutazione di un campo K, allora A è un anello di valutazione banale su k (perché $k^* = k \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{U}(A)$). La condizione **(G)** implica anche che il gruppo moltiplicativo k^* è un retratto di $\mathcal{U}(A)$, in quanto la composizione degli omomorfismi canonici:

$$k^* \hookrightarrow \mathcal{U}(A) \twoheadrightarrow k(A)^*$$

è un isomorfismo. In generale: $k^* \subsetneq \mathcal{U}(A) = \{a + m \mid a \in k^*,\, m \in \mathfrak{m}\}$ (ad esempio, per $A = k[\![X]\!]$).

Proposizione 7.12. *Sia A un anello di valutazione soddisfacente alla condizione **(G)**. Allora:*

$$A = k + \mathfrak{m}.$$

Dimostrazione. La successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

si scinde, per la condizione **(G)**. Infatti, preso comunque $z \in A$ consideriamo

$$\alpha := z + \mathfrak{m} \in \frac{A}{\mathfrak{m}} \cong k$$

allora $z - \alpha \in \mathfrak{m}$. Infatti:

$$\alpha + \mathfrak{m} = z + \mathfrak{m}, \quad \text{considerando} \quad \alpha \in k \subseteq A.$$

Quindi si ha anche che $z = \alpha + (z - \alpha) \in \alpha + \mathfrak{m}$. □

Nel caso dei DVR che soddisfano alla proprietà **(G)** si può dire molto di più:

Proposizione 7.13. *Sia $(A, \mathfrak{m} = tA)$ un DVR di un campo K soddisfacente alla proprietà **(G)**, dunque $A = k + tA$ (cfr. Proposizione 7.12). Allora, per ogni $n \geq 0$ e per ogni $z \in A$ esistono, e sono univocamente determinati, $n+1$ elementi $a_0, \ldots, a_n \in k$ ed un elemento $r_{n+1} \in \mathfrak{m}^{n+1}$, in modo tale che:*

$$z = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + r_{n+1}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.
$n = 0$ (cfr. Proposizione 7.12).
$n = 1$. Già sappiamo che:

$$z = a_0 + r_1 \quad \text{con} \quad r_1 \in \mathfrak{m},\ a_0 \in k$$

dunque, nel nostro caso attuale, $r_1 = z_1 t$ con $z_1 \in A$. Ripetendo il caso $n = 0$ per z_1, abbiamo:

$$z_1 = a_1 + r_2^* \quad \text{con} \quad r_2^* \in \mathfrak{m},\ a_1 \in k$$

quindi:

$$z = a_0 + a_1 t + r_2 \quad \text{con} \quad r_2 = r_2^* t \in \mathfrak{m}^2.$$

Se poi accadesse che:

$$z = a_0 + a_1 t + r_2 = a_0' + a_1' t + r_2' \quad \text{con} \quad a_i, a_i' \in k,\ i = 0, 1 \text{ e } r_2, r_2' \in \mathfrak{m}^2$$

allora (per l'unicità già vista nel caso $n = 0$)

$$a_0 = a_0', \quad (a_1 + r_2^*)t = (a_1' + r_2'^*)t$$

(dove si è posto $r_2' := r_2'^* t$, con $r_2'^* \in \mathfrak{m}$). Allora:

$$a_1 + r_2^* = a_1' + r_2'^* \quad \text{con} \quad a_1, a_1' \in k,\ r_2^*, r_2'^* \in \mathfrak{m}.$$

Riutilizzando l'unicità, già nota nel caso $n = 1$, abbiamo:

$$a_1 = a_1' \quad \text{e} \quad r_2^* = r_2'^*$$

quindi $r_2 = r_2'$.
Il passo induttivo generale (dal caso $n-1$ al caso n) è ormai un semplice esercizio.

□

Corollario 7.14. *Sia $(A, \mathfrak{m} = tA, k)$ un DVR non banale di un campo K, soddisfacente alla condizione **(G)**. Allora:*

(a) *Esiste un omomorfismo iniettivo canonico:*

$$A \hookrightarrow k\,[\![T]\!] \quad \textit{anello di serie formali in una indeterminata } T,$$

che si estende in modo unico ad un omomorfismo (iniettivo) tra i campi dei quozienti:

$$K \hookrightarrow k\,(\!(T)\!) \quad \textit{(con } k(\!(T)\!) \textit{ campo delle serie di Laurent nell'indeterminata } T\textit{)}$$

Inoltre, la valutazione discreta canonica:

$$\mathrm{ord}:\ k\,(\!(T)\!) \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$$

ristretta a K individua una valutazione discreta (normalizzata) $v := \mathrm{ord}\,|_K$: $K \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$ tale che $A_v = A$;

(b) $\dim_k \left(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}\right) = 1$, *per ogni $n \geq 0$;*

(c) $\dim_k \left(\frac{A}{\mathfrak{m}^n}\right) = n$, *per ogni $n \geq 1$;*

(d) *Per ogni $z \in A$, $z \neq 0$*

$$\mathrm{ord}(z) = \dim_k \left(\frac{A}{(z)}\right).$$

Dimostrazione.

(a) L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & k\,[\![T]\!] \\ z & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \end{array}$$

(dove le a_i, $i \geq 0$, sono determinate univocamente da z come nella Proposizione 7.13) definisce l'omomorfismo iniettivo di anelli cercato.

(b) Per ogni $n \geq 0$, $\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$ è dotato di una struttura naturale di $\left(\frac{A}{\mathfrak{m}}\right) = k$-spazio vettoriale. L'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha t^n + \mathfrak{m}^{n+1} \end{array}$$

è un isomorfismo di k-spazi vettoriali (essendo, nel caso in esame $\mathcal{U}(A) \cong k^*$).

(c) Tale affermazione discende da (b) per induzione su $n \geq 1$, considerando la successione esatta di k-spazi vettoriali:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}^{n-1}}{\mathfrak{m}^n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}^n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}^{n-1}} \longrightarrow 0$$

(d) Se $z \in A$, allora $zA = ut^rA = t^rA = \mathfrak{m}^r$, dunque:

$$\dim_k \left(\frac{A}{zA}\right) = \dim_k \left(\frac{A}{\mathfrak{m}^r}\right) = r.$$

D'altra parte se $z = ut^r$, allora:

$$\mathrm{ord}(z) = \mathrm{ord}_A(z) = r.$$

□

I risultati precedenti mettono bene in risalto il ruolo che hanno gli anelli di serie formali (e di serie di Laurent) nello studio dei DVR soddisfacenti alla proprietà **(G)**.

Osservazioni 7.15. 1. Le immersioni considerate nel Corollario 7.14 (a) sono casi particolari e concreti di immersioni che si possono stabilire anche nel caso di anelli di valutazione (non necessariamente discreta) utilizzando la nozione di completamento (di campi dotati di una valutazione e di anelli locali rispetto alla topologia $\mathfrak{m}$-adica).
Accenniamo, senza dimostrazioni, al caso generale.
Data una valutazione $v : K \to \Gamma_\infty$. Si consideri la famiglia:

$$\mathcal{V} := \{V_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\},$$

dove:

$$V_\alpha := \{ z \in K \mid v(z) > \alpha \}.$$

Allora, non è difficile dimostrare che esiste un'unica topologia $\mathcal{T}_v$, compatibile con la struttura di campo, sopra K, in modo tale che $\mathcal{V}$ sia un sistema fondamentale di intorni di 0 in K. Ora un tale spazio topologico, quale è $(K, \mathcal{T}_v)$ può essere immerso come sottocampo denso dentro ad un campo topologico completo $\widehat{K} := (\widehat{K}, \widehat{\mathcal{T}_v})$ (costruito nel modo usuale tramite le successioni di Cauchy). Analogamente, l'anello A_v della valutazione v è un anello topologico con la topologia relativizzata da quella di K, cioè $A := (A_v, \mathcal{T}_v \mid_{A_v})$. Come ogni spazio topologico $(A_v, \mathcal{T}_v \mid_{A_v})$ può essere immerso in un anello topologico completo $\widehat{A} := (\widehat{A}_v, \widehat{\mathcal{T}_v \mid_{A_v}})$.
Allora:

(a) La valutazione $v : K \to \Gamma_\infty$ si prolunga in modo unico ad una valutazione

$$\widehat{v} : \widehat{K} \longrightarrow \Gamma_\infty \quad (\text{con } \widehat{v}\mid_K = v)$$

avente lo stesso gruppo di valori di v.

(b) L'anello della valutazione $\widehat{v}$ è esattamente $\widehat{A}$.

(c) La topologia $\widehat{\mathcal{T}_v}$ di $\widehat{K}$ coincide con la topologia indotta su $\widehat{K}$ dalla valutazione $\widehat{v}$, cioè $\mathcal{T}_{\widehat{v}}$.

(d) L'ideale massimale $\widehat{\mathfrak{m}}$ di $\widehat{A}$ coincide con il completamento dell'A-modulo topologico $(\mathfrak{m},\ \mathcal{T}_v\mid_{\mathfrak{m}})$.

(e) $(\widehat{A},\ \widehat{\mathfrak{m}})$ è isomorfo (come anello topologico) al completamento di $(A,\ \mathfrak{m})$ rispetto alla topologia $\mathfrak{m}$-adica se e soltanto se A è un DVR.

(f) $\widehat{A} = A + \widehat{\mathfrak{m}}$.

(g) $k(\widehat{A}) \cong k(A)$.

(Per le dimostrazioni cfr. [B-85b, Ch. 6, Par. 5, N°3, pag. 117; Ex.4 pag. 177]).
Nel caso di un DVR $(A,\ \mathfrak{m} = tA,\ k)$ che soddisfa alla proprietà **(G)** allora (cfr. Corollario 7.14):

$$k\,[[T]] \cong \widehat{A} = \lim_{\leftarrow} \frac{A}{t^n A} \quad (\text{a meno di } k\text{-isomorfismi})$$

(dove $\left\{\left(\frac{A}{t^nA};\ \varphi_{n,m} : \frac{A}{t^nA} \twoheadrightarrow \frac{A}{t^mA}\right),\ n \le m\right\}$ è un sistema inverso di omomorfismi di anelli che determina il completamento $\mathfrak{m}$-adico di A (cfr. [AM-69, Cap. 10, pag. 100 e segg.]. Si noti che questo è un caso *estremamente* particolare del Teorema di I.S. Cohen [C-46], che descrive la struttura degli anelli locali noetheriani completi (rispetto alla topologia $\mathfrak{m}$-adica); (cfr. anche [D-67]). In questo caso $\widehat{K} = k\,((T))$.

2. Nella Proposizione 7.8 abbiamo visto quali sono gli ideali di un anello di valutazione discreta. In particolare dalla Proposizione 7.8 discende che l'insieme degli ideali di un DVR è totalmente ordinato rispetto all'inclusione. Tale proprietà vale più in generale per gli anelli di valutazione. Più precisamente, tale proprietà caratterizza, tra gli anelli integri, gli anelli di valutazione.
Gli anelli (non necessariamente integri) tali che l'insieme degli ideali è totalmente ordinato sono stati studiati sotto il nome di *anelli locali aritmetici* (cfr. [L-77, pag. 39]).

3. Non abbiamo trattato della dimensione (di Krull) o rango di un anello di valutazione in quanto nel seguito ci occuperemo essenzialmente di anelli di valutazione discreta (i quali sono particolari anelli di valutazione di dimensione 1).
Accenniamo comunque, senza dimostrazioni, ad alcune proprietà concernenti la dimensione degli anelli di valutazione.
Se chiamiamo *rango* di un gruppo totalmente ordinato il numero (finito o ∞) dei suoi sottogruppi isolati distinti da tutto il gruppo; allora, si può dimostrare facilmente che la *dimensione (di Krull)* di un anello di valutazione coincide con il rango del suo gruppo di valori.
Nel caso di dimensione 1, si hanno le seguenti affermazioni equivalenti:

(i) $(A,\, \mathfrak{m},\, k)$ è un anello di valutazione di dimensione 1 di un campo K;

(ii) A è un anello di valutazione di K i cui ideali primi sono (0) e $\mathfrak{m}$;

(iii) A è un elemento massimale nell'insieme dei sottoanelli di K, distinti da K;

(iv) Il gruppo di divisibilità $\frac{K^*}{\mathcal{U}(A)}$ dell'anello integro A è isomorfo ad un sottogruppo ordinato non nullo di $(\mathbb{R},\, +)$.

(Per le dimostrazioni cfr. [B-85b, Ch. 5, par.4, N°3, 4, 5]).
Infine, notiamo che gli anelli di valutazione:

$$k\,[X]_{(X)} + Yk(X)\,[Y]_{(Y)}$$
$$k\,[Y]_{(Y)} + Xk(Y)\,[X]_{(X)}$$

sono anelli di valutazione di $k\,(X,Y)$ di dimensione 2 (perché il rango del loro gruppo di valori $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, è uguale a 2) che hanno come ideali primi rispettivamente:

$$(0) \subset Yk(X)\,[Y]_{(Y)} \subset Xk\,[X]_{(X)} + Yk(X)\,[Y]_{(Y)}$$
$$(0) \subset Xk(Y)\,[X]_{(X)} \subset Yk\,[Y]_{(Y)} + Xk(Y)\,[X]_{(X)}$$

e quindi sono esempi di anelli di valutazione, ma non DVR, che soddisfano alla proprietà **(G)**.
Tramite l'Esempio 3.10, 11. di pag. 24, prendendo come gruppo ordinato un sottogruppo di $(\mathbb{R},+)$ diverso da $(\mathbb{Z},+)$, si può mostrare l'esistenza di anelli di valutazione di dimensione 1 che non sono DVR.