Capitolo 2

Dipendenza integrale e teoremi di Cohen-Seidenberg

Definizione 2.1. Sia A un sottoanello di un anello B. Un elemento $x \in B$ si dice *integrale* (o *intero*) su A se x è radice di un polinomio monico a coefficienti in A, cioè se x soddisfa ad una relazione del tipo:

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0, \text{ con } a_i \in A,\ 0 \leq i \leq n-1,\ n \geq 1.$$

Esempi 2.2. (a) Ogni elemento di un anello A è intero su A.

(b) Se $A = K$ e $B = K'$ sono due campi con $K \subseteq K'$, allora un elemento $x \in K'$ è intero su K se, e soltanto se, x è algebrico su K.

(c) Sia $A = \mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Q}$. Ebbene, se $x \in \mathbb{Q}$, allora:

$$x \text{ intero su } \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Se $x = \frac{y}{z}$ con $y, z \in \mathbb{Z},\ z \neq 0$ e MCD(y, z) = 1 e vale (1), allora $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} z y^{n-1} + y^n = 0$. Quindi $y^n = -z(a_0 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y^{n-1})$, dunque $z \mid y^n$, quindi $z \mid y$ cioè $z = \pm 1$. Il viceversa è banale.

Proposizione 2.3. *Sia A un sottoanello di B e sia $x \in B$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *x è intero su A;*

(b) *$A[x]$ è un A-modulo finitamente generato (in breve f.g.);*

(c) *esiste un anello C, $A[x] \subseteq C \subseteq B$, tale che C è un A-modulo f.g.;*

(d) *esiste un $A[x]$-modulo fedele M (cioè, $\mathrm{Ann}(M) = 0$), che è f.g. come A-modulo.*

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). Essendo $x^n = -(a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$, allora $A[x] \cong A \oplus xA \oplus \cdots \oplus x^{n-1}A$.
(b) $\Rightarrow$ (c) : banale, basta prendere $C = A[x]$.

(c) $\Rightarrow$ (d). Basta prendere $M = C$.
(d) $\Rightarrow$ (a). Sia $M = z_1 A \oplus \cdots \oplus z_n A$ con $z_i \in M$. Essendo M fedele, allora $xM \neq 0$, con $xM \subseteq M$. Pertanto

$$xz_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij} x) z_j = 0$$

con $a_{ij} \in A$, δ_{ij} simbolo di Kronecker. In forma matriciale, la relazione precedente si riscrive nella maniera seguente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$$

Dunque moltiplicando ambo i membri per l'aggiunta della matrice $(a_{ij} - \delta_{ij} x)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ otteniamo:

$$\det \left((a_{ij} - \delta_{ij} x)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right) \cdot M = 0.$$

Essendo M fedele, allora in particolare concludiamo che:

$$\det \left((a_{ij} - \delta_{ij} x)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right) = 0$$

(lo sviluppo di tale determinante fornisce un'equazione di dipendenza integrale di x su A). $\square$

Corollario 2.4. *Sia A un sottoanello di un anello B. L'insieme degli elementi di B interi su A forma un sottoanello di B (contenente A).*

Dimostrazione. Se $x, y \in B$ sono integrali su A, allora $A[x \pm y]$ e $A[xy]$ sono sottoanelli di $C = A[x, y]$, il quale è un A-modulo f.g. perché finitamente generati come A-moduli sono $A[x]$ e $A[y]$. Dunque per l'equivalenza (a)$\Leftrightarrow$(c) della Proposizione 2.3, $x \pm y$ e xy sono interi su A. $\square$

Osservazioni 2.5. (a) Ovviamente, anche per estensioni di anelli si può parlare di un elemento algebrico (non necessariamente intero). Sia A un sottoanello di un anello B. Un elemento $b \in B$ si dice *algebrico* su A, se b è uno zero di un polinomio non nullo a coefficienti in A:

$$f(X) := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X], \quad n \geq 1, \quad f(b) = 0$$

È facile vedere che, se $a_n \neq 0$, allora:

$$b \text{ è algebrico su } A \Rightarrow b a_n \text{ è intero su } A$$

(si moltiplichi $f(X)$ per a_n^{n-1}).
Viceversa, se esiste $a \in A$, a non nilpotente e $b \in B$ in modo tale che ba è intero su A, allora b è algebrico su A.
Nel caso in cui A sia un sottoanello di un anello integro B, con K (risp. E) campo dei quozienti di A (risp. B), allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. B è algebrico su A (nel senso che ogni $b \in B$ è algebrico su A);
2. E è un'estensione algebrica di K.

(b) I dettagli di quanto affermeremo in questa osservazione sono in [G-69]. Una delle ragioni per le quali, in teoria degli anelli, si preferisce trattare con elementi "interi", piuttosto che con elementi "algebrici" è dovuta al fatto che la *somma* di elementi algebrici su un sottoanello può non essere un elemento algebrico.
Sia R un anello contenente due elementi non nulli $u, v \in R$, tali che $uR \cap vR = 0$ (ad esempio $R := \frac{\mathbb{Z}}{I}$ dove $I := (p) \cap (q)$ con p e q due primi distinti ed $u := p + I,\ v := q + I$). Si consideri l'anello $T := \frac{R[X,Y]}{(uX,vY)}$.
Poniamo $x := X + (uX, vY),\ y := Y + (uX, vY)$. Allora, $x, y \in T$ sono algebrici su R, essendo $ux = 0 = vy$. Ma $x + y$ non è algebrico su R (la relazione di algebricità avrebbe come conseguenza l'esistenza di un elemento non nullo in $uR \cap vR$).

Definizione 2.6. Sia A un sottoanello di un anello B. L'insieme A' di tutti gli elementi di B che sono interi su A si dice *chiusura integrale di A in B*.
Se $A = A'$, allora A si dice *integralmente chiuso* in B.
Se invece $A' = B$, allora B si dice *intero* su A.
Se, poi, A è integro e $B = K$ è il suo campo dei quozienti, allora la chiusura intera A' di A in K si chiama *normalizzazione* di A. Se $A = A'$, allora A si dice *normale*.

Proposizione 2.7. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *(Proprietà transitiva della dipendenza integrale).*
Se $A \subseteq B \subseteq C$, se B è intero su A e se C è intero su B, allora C è intero su A.

(b) *Se $A \subseteq B$ e se A' è la chiusura intera di A in B, allora A' è integralmente chiuso in B.*

(c) *Se $A \subseteq B$ e se B è intero su A, allora, per ogni ideale $\mathfrak{b} \subseteq B$, si ha che:*

$$\frac{A}{\mathfrak{b} \cap A} \hookrightarrow \frac{B}{\mathfrak{b}}$$

è intero.

(d) *Se $A \subseteq B$ e se B è intero su A, allora, per ogni parte moltiplicativa S di A, si ha che:*

$$S^{-1}A \hookrightarrow S^{-1}B$$

è intero.

(e) *Sia A un anello integro ed A' la sua normalizzazione. Per ogni parte moltiplicativa $S \subseteq A$, $0 \notin S$, allora $S^{-1}A'$ è la normalizzazione di $S^{-1}A$.*

(f) *Sia $A \subseteq B$ con A e B anelli integri e B intero su A. Allora:*

$$A \text{ è un campo} \iff B \text{ è un campo}.$$

(g) *Sia $A \subseteq B$ con B intero su A. Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primo di B. Allora:*

$$\mathfrak{q} \text{ è massimale in } B \Longleftrightarrow \mathfrak{q} \cap A \text{ è massimale in } A.$$

(h) *(Proprietà di incomparabilità, in breve: INC).*
Sia $A \subseteq B$ con B intero su A. Se $\mathfrak{q}_1$ e $\mathfrak{q}_2$ sono ideali primi di B con $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ e $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, allora $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.

Dimostrazione. (a), (b), (c) e (d) sono facili esercizi, (e) segue direttamente da (d) (l'ipotesi $0 \notin S$ assicura che $S^{-1}A$ ed A hanno lo stesso campo dei quozienti).
(f). Se B è un campo ed $x \in A$, $x \neq 0$, allora $x^{-1} \in B$. Essendo B intero su A, allora deve sussistere una relazione del tipo:

$$x^{-n} = -(a_0 + a_1 x^{-1} + \cdots + a_{n-1} x^{-(n-1)}), \quad a_i \in A$$

donde

$$x^{-1} = x^{-n} \cdot x^{n-1} = -(a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \in A.$$

Viceversa, se A è un campo, preso comunque $y \in B \setminus A$, consideriamo l'espressione di grado minimo che esprime la dipendenza integrale di y su A:

$$y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0, \quad a_i \in A.$$

Ebbene, possiamo affermare che $y^{-1} \in B$. Infatti, essendo $a_0 \neq 0$ (per la minimalità dell'espressione, tenuto conto che B è integro), allora:

$$y\left[-(y^{n-1} + a_{n-1} y^{n-2} + \cdots + a_2 y + a_1) a_0^{-1}\right] = 1$$

dunque, essendo $a_0^{-1} \in A$ (A è un campo), allora:

$$y^{-1} = -(y^{n-1} + a_{n-1} y^{n-2} + \cdots + a_2 y + a_1) a_0^{-1} \ \in B$$

(g). Segue da (f) e da (c).
(h). Sia $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$. Dunque:

$$\mathfrak{q}_1 B_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_2 B_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{p}}.$$

Per la (g), $\mathfrak{q}_1 B_{\mathfrak{p}}$ e $\mathfrak{q}_2 B_{\mathfrak{p}}$ devono essere entrambi massimali (contraendosi sull'ideale massimale $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$), quindi $\mathfrak{q}_1 B_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_2 B_{\mathfrak{p}}$, donde $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$. □

Teorema 2.8 (Cohen-Seidenberg, 1946)**.** *Sia A un sottoanello di B. Supponiamo che B sia intero su A.*

(a) *(Lying-Over, in breve LO). Preso comunque un ideale $\mathfrak{p}$ di A, esiste sempre (almeno) un ideale primo $\mathfrak{q}$ di B tale che $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.*

(b) *(Going-Up, in breve GU). Presi comunque due ideali primi $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ in A, sia $\mathfrak{q}_1$ un ideale primo di B tale che $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. Allora esiste un ideale primo $\mathfrak{q}_2$ in B tale che $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$, con $\mathfrak{q}_2 \supset \mathfrak{q}_1$.*

Dimostrazione.

(a) Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A. Denotiamo con $B_\mathfrak{p}$ l'anello delle frazioni $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$. Allora $B_\mathfrak{p}$ è intero su $A_\mathfrak{p}$ (Proposizione 2.7.(d)). Quindi se $\mathfrak{m}$ è un qualsiasi ideale massimale di $B_\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{m} \cap A_\mathfrak{p}$ deve coincidere con l'ideale massimale di $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ di $A_\mathfrak{p}$. Sia $\mathfrak{q}$ la controimmagine in B dell'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di $B_\mathfrak{p}$ (tramite l'omomorfismo canonico $B \to B_\mathfrak{p}$). Per costruzione è facile verificare che $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

(b) Consideriamo l'immagine $\widetilde{\mathfrak{p}_2}$ di $\mathfrak{p}_2$ su $\frac{A}{\mathfrak{p}_1}$. Sia $\mathfrak{q}_1$ un ideale primo di B che si contrae su $\mathfrak{p}_1$ (cfr. (a)). Allora, $\frac{A}{\mathfrak{p}_1} \hookrightarrow \frac{B}{\mathfrak{q}_1}$ è intero (Proposizione 2.7.(c)), dunque deve esistere un ideale primo $\widetilde{\mathfrak{q}_2}$ in $\frac{B}{\mathfrak{q}_1}$ che si contrae su $\widetilde{\mathfrak{p}_2}$. La conclusione discende facilmente dalla ben nota relazione tra gli ideali (primi) di $\frac{B}{\mathfrak{q}_1}$ e quelli di B, contenenti $\mathfrak{q}_1$. □

Osservazioni 2.9. (a) Nell'enunciato del teorema precedente, parte (b), o teorema del GU si può rimpiazzare $\mathfrak{p}_1$ (risp. $\mathfrak{q}_1$) con un ideale qualsiasi (non necessariamente primo di A (risp. di B)).

(b) Si può dimostrare che dato un omomorfismo di anelli $f : A \to B$, l'applicazione continua f^* canonicamente associata a f dallo spettro primo di B a quello di A è chiusa se, e soltanto se, $f(A) \subseteq B$ verifica la proprietà GU (= conclusione del teorema del GU). In particolare, se B è intero su $f(A)$ allora f^* è chiusa.

(c) Se $f : A \to B$ è intero (cioè, per definizione se B è intero su $f(A)$), allora, preso comunque un ideale primo $\mathfrak{p}$ di A denotiamo con $\{\mathfrak{q}_i \mid i \in I\}$ la famiglia degli ideali primi di B che hanno come controimmagine $\mathfrak{p}$. Sia $S := A \setminus \mathfrak{p}$ e $T := B \setminus \bigcup_{i\in I} \mathfrak{q}_i$. Allora, si verifica facilmente che:

$$S^{-1}B = T^{-1}B \qquad (\text{dove } S^{-1}B := (f(S))^{-1}B).$$

(d) Se $f : A \to B$ è un omomorfismo di anelli e B è un A-modulo finitamente generato (in particolare, se B è intero su $f(A)$), allora per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A l'insieme degli ideali primi $\{\mathfrak{q}_i \mid i \in I\}$ di B che hanno come controimmagine $\mathfrak{p}$ è un insieme finito. Questa affermazione discende dal punto precedente e dal teorema di struttura delle algebre artiniane (riconducendosi al caso in cui $\mathfrak{p}$ è l'ideale (0) di un anello integro).

(e) Per completezza diamo anche l'enunciato del Teorema del Going-Down (in breve, GD) di Cohen-Seidenberg:
Sia $A \subseteq B$ un'inclusione di anelli integri. Supponiamo che A sia integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti e B sia intero su A. Se $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ sono due ideali primi di A e $\mathfrak{q}_2$ è un ideale primo di B tale che $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$, allora esiste un ideale primo $\mathfrak{q}_1$ in B tale che $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ con $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.

(Per la dimostrazione cfr. ad es. [AM-69, Theorem 5.16] oppure [B-85b, Ch. 5, Par. 2, Théorème 3, pag. 52 e segg.]).
Riteniamo opportuno accennare al fatto che la proprietà (GD) (= conclusione del teorema del going-down) risulta essere una forma debole della piattezza e della proprietà di essere un'applicazione aperta (della funzione

continua tra gli spettri primi associata ad un omomorfismo tra anelli). Come tale presenta aspetti di particolare interesse nello studio di varie classi di anelli. Per un'amplia bibliografia in merito cfr. [DP-78], [K-74], [DF-84].

(f) Si noti che se A è un sottoanello di un anello B, con B intero su A, e se $\mathfrak{q}$ è un ideale primo di B, allora in generale

$$A_{\mathfrak{q}\cap A} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

non è un omomorfismo intero (ad esempio, si prenda $A := K\left[X^2-1\right]$, $B := K\left[X\right]$, $\mathfrak{q} := (X-1)$, dove K è un campo ed X una indeterminata su K, allora $\mathfrak{q}\cap A = (X^2-1) =: \mathfrak{p}$. La chiusura integrale di $A_{\mathfrak{p}}$ in $B_{\mathfrak{q}}$ è $S^{-1}B \subsetneq B_{\mathfrak{q}}$ dove $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Si noti che

$$\frac{1}{X+1} \in B_{\mathfrak{q}} \setminus S^{-1}B).$$

(g) Ricordiamo, infine, che gli omomorfismi interi inducono "buone" relazioni tra le dimensioni (di Krull) degli anelli. Precisamente, come facile conseguenza delle proprietà (GU) e (INC), si ha:

1. $f : A \longrightarrow B$ intero $\Longrightarrow \dim(B) \leq \dim(A)$, [K-74, Theorem 45];
2. $f : A \longrightarrow B$ intero e iniettivo $\Longrightarrow \dim(B) = \dim(A)$, [K-74, Theorem 48].