Capitolo 12

La topologia di Zariski su una superficie di Riemann astratta

Sia, al solito, k un sottoanello (non necessariamente un campo) di un campo K. Su

$$S := \mathrm{Zar}(K, k) := \{V \mid V \text{ anello di valutazione } \mathrm{Qz}(V) = K,\ k \subseteq V \subsetneq K\}$$

introduciamo una topologia nella maniera seguente.
Per ogni sottoinsieme finito di elementi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq K$, poniamo:

$$\mathcal{U}_k(x_1, \ldots, x_n) := \{V \in S \mid k[x_1, \ldots, x_n] \subseteq V\} = \mathrm{Zar}\,(K, k[x_1, \ldots, x_n])\,.$$

È subito visto che dato un altro insieme finito di elementi $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subseteq K$ si ha:

$$\mathcal{U}_k(x_1, \ldots, x_n) \cap \mathcal{U}_k(y_1, \ldots, y_m) = \mathcal{U}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Inoltre, per ogni $x \in k$, $U_k(x) = S$. Pertanto, la famiglia dei sottospazi $U_k(x_1, \ldots, x_n)$, al variare di $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq K$, determina la base per gli aperti di una topologia sullo spazio $S := \mathrm{Zar}(K, k)$. Lo spazio S dotato di tale topologia è detto *superficie di Riemann (astratta) del campo K relativamente a k.*
È subito visto che, dal teorema di Krull, discende che se $\overline{k}^K$ è la chiusura integrale di k in K, allora:

$$\mathrm{Zar}(K, k) = \mathrm{Zar}(K, \overline{k}^K) \quad \text{(sia come insiemi che come spazi topologici).}$$

Esempio 12.1. Supponiamo che $k = D$ sia un dominio di Dedekind, F il campo dei quozienti di D e K un'estensione di F. Per ogni $W \in \mathrm{Zar}(K, D)$, se $F \not\subseteq W$, allora $W \cap F$ è un anello di valutazione di F che contiene D. Peraltro, $W \cap F = D_{\mathfrak{m}}$ per un qualche $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$. Poniamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Zar}'(K, D) :&= \{W \in \mathrm{Zar}(K, D) \mid W \not\supseteq F\} = \\ &= \{W \mid W \text{ di valutazione per } K,\ W \cap F = D_{\mathfrak{m}},\ \mathrm{DVR}\}\,.\end{aligned}$$

Quindi, $\mathrm{Zar}(K, D) = \mathrm{Zar}(K, F) \cup \mathrm{Zar}'(K, D)$. Inoltre, $\mathrm{Zar}(K, D) = \mathrm{Zar}'(K, D)$ se e soltanto se K è un'estensione algebrica di F.

Proposizione 12.2. *La chiusura di un punto $P := (\mathcal{O}_P, \mathfrak{m}_P) \in \mathrm{Zar}(K, k)$ nella topologia di Zariski della superficie di Riemann astratta S, $\mathrm{cl}_S(P)$, coincide con l'insieme:*

$$\{Q := (\mathcal{O}_Q, \mathfrak{m}_Q) \in S \,|\, \mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{O}_P\} .$$

Dimostrazione. Sia $U := \mathcal{U}_k(x_1, \ldots, x_n)$ un qualunque aperto della base tale che $P \in S \setminus U$, dunque $k[x_1, \ldots, x_n] \not\subseteq \mathcal{O}_P$.
Se $\mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{O}_P$, allora necessariamente $k[x_1, \ldots, x_n] \not\subseteq \mathcal{O}_Q$ e quindi $Q \in S \setminus U$. Pertanto $\{(\mathcal{O}_Q, \mathfrak{m}_Q) \in S \,|\, \mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{O}_P\} \subseteq \mathrm{cl}_S(P)$. Viceversa, se $\mathcal{O}_Q \not\subseteq \mathcal{O}_P$, possiamo trovare $x \in K$ tale che $k[x] \in \mathcal{O}_Q$ e $k[x] \not\subseteq \mathcal{O}_P$, quindi $P \in S \setminus \mathcal{U}_k(x)$, ma $Q \notin S \setminus \mathcal{U}_k(x)$. Ovvero $Q \notin \mathrm{cl}_S(P)$. □

Proposizione 12.3. *Una superficie di Riemann astratta $S := \mathrm{Zar}(K, k)$ è sempre uno spazio topologico T_0.*

Dimostrazione. Siano $P = (\mathcal{O}_P, \mathfrak{m}_P)$ e $Q = (\mathcal{O}_Q, \mathfrak{m}_Q)$ due punti distinti di S, allora $\mathcal{O}_P \not\subseteq \mathcal{O}_Q$ ad esempio. Sia $x \in K$ tale che $k[x] \subseteq \mathcal{O}_P$ e $k[x] \not\subseteq \mathcal{O}_Q$, dunque $P \in \mathcal{U}_k(x)$ e $Q \notin \mathcal{U}_k(x)$. □

Osservazione 12.4. Una superficie di Riemann astratta $S := \mathrm{Zar}(K, k)$ non è in generale uno spazio topologico T_1. Ad esempio se $P, Q \in S$ e $\mathcal{O}_P \subsetneq \mathcal{O}_Q$ allora è possibile trovare $x \in \mathcal{O}_Q \setminus \mathcal{O}_P$, ovvero $Q \in \mathcal{U}_k(x)$ e $P \notin \mathcal{U}_k(x)$. Essendo $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_Q$ non è però possibile trovare alcun aperto contenente P che non contenga anche Q.

Teorema 12.5. *Sia k un anello integralmente chiuso nel campo K. Allora, la superficie di Riemann $S := \mathrm{Zar}(K, k)$ è uno spazio topologico T_1 se e soltanto se una delle seguenti due condizioni è verificata:*

(a) *k è un campo e $k \subset K$ è un'estensione di grado di trascendenza* 1.

(b) *$k = D$ è un dominio con campo dei quozienti F ed $F \subseteq K$ è un'estensione algebrica ed inoltre per ogni ideale primo non nullo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$, $D_\mathfrak{p}$ è un dominio di valutazione di rango* 1.

Premettiamo il seguente:

Lemma 12.6. *Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$ è uno spazio T_1 se e soltanto se ogni suo punto è chiuso.*

Dimostrazione. Se ogni punto $x \in X$ è chiuso allora $X \setminus \{x\}$ è aperto, dunque presi comunque $x, y \in X$ si ha $x \in X \setminus \{y\}$ e $y \in X \setminus \{x\}$ ovvero X è T_1. Viceversa sia $x \in X$ se X è T_1 preso comunque $y \in X$, $y \neq x$, esiste un intorno aperto $\mathcal{U}_y$ di y che non contiene x. Ne segue che $X \setminus \{x\} = \bigcup \{\mathcal{U}_y \,|\, y \in X,\, y \neq x\}$ è un aperto, ovvero $\{x\}$ è chiuso. □

Dimostrazione del Teorema 12.5
Limitiamoci a dimostrare che nei casi (a) o (b) $S := \mathrm{Zar}(K, k)$ è uno spazio T_1. Nel caso (a) già sappiamo che i punti $Q = (\mathcal{O}_Q, \mathfrak{m}_Q)$ sono tutti domini di valutazione discreta e ciascuno di essi è al di sopra di un punto di $\mathrm{Zar}(k(X), k)$ del tipo $P_f := (k[X]_f, fk[X]_f)$ dove $f \in k[X]$ è un polinomio irriducibile, oppure

$P_\infty := (\mathcal{O}_\infty, \mathfrak{m}_\infty)$. Ogni punto di S è chiaramente chiuso e dunque S è uno spazio topologico T_1.
Nel caso (b) $S = \mathrm{Zar}(K, D) = \mathrm{Zar}'(K, D)$ (cfr. Esempio 12.1) e quindi per ogni $Q := (\mathcal{O}_Q, \mathfrak{m}_Q)$ esiste un ideale massimale $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ tale che $\mathcal{O}_Q$ è un estensione dell'anello di valutazione di rango 1 (o dimensione 1) $D_\mathfrak{m}$. Precisamente, $\mathcal{O}_Q$ è la localizzazione della chiusura integrale di $D_\mathfrak{m}$ nell'estensione algebrica K del suo campo dei quozienti F. Per le ben note proprietà della chiusura integrale $\dim\left(\overline{D_\mathfrak{m}}^K\right) = 1\,(= \dim(D_\mathfrak{m}))$. Da ciò discende che ogni anello di valutazione $\mathcal{O}_Q$ ha dimensione 1 (ovvero rango 1) e quindi ogni punto $Q \in S$ è chiuso.
La dimostrazione del viceversa si può trovare in [ZS-75b, Theorem 39, pag. 111]. □

Una delle proprietà topologiche principali di una superficie di Riemann astratta è che essa è uno spazio topologico quasi-compatto e, quindi, la base degli aperti del tipo $\mathcal{U}_k(x_1, \ldots, x_n)$ è una base di aperti quasi-compatti. La dimostrazione classica è piuttosto elaborata [ZS-75b, Theorem 40, pag. 113]. Noi daremo nel seguito una dimostrazione più semplice e diretta, che fornisce maggiori informazioni ed una costruzione di tipo "spettrale" valida però soltanto per superificie di Riemann del tipo $\mathrm{Zar}(K, D)$ dove D è un dominio e K è il suo campo dei quozienti.

Terminiamo questo capitolo con una estensione recente della nozione di superficie di Riemann dovuta a B. Olberding.

Sia D un dominio con campo dei quozienti K. In tale situazione poniamo semplicemente $\mathrm{Zar}(D)$ al posto di $\mathrm{Zar}(K, D)$. Poniamo poi:

$$Z(D) := \{T \mid T \text{ sopraanello di } D,\ T \text{ integralmente chiuso}\}.$$

Chiaramente $\mathrm{Zar}(D) \subseteq Z(D)$.
In $Z(D)$ possiamo "estendere" la topologia di Zariski definita su $\mathrm{Zar}(D)$, prendendo come base di aperti i sottospazi del tipo:

$$\mathcal{U}_D(x_1, \ldots, x_n) := \{T \mid T \in Z(D), \text{ con } x_1, \ldots, x_n \in T\}$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$. Dalla definizione segue immediatamente che:

$$\mathcal{U}_D(x_1, \ldots, x_n) = Z\left(D\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]\right).$$

B.Olberding ha recentemente introdotto su $Z(D)$ una topologia più fine di quella di Zariski, la quale, tuttavia, ristretta a $\mathrm{Zar}(D)$ coincide con la topologia di Zariski di $\mathrm{Zar}(D)$.
Per ogni ideale frazionario $\mathcal{A}$ di D denotiamo con $\mathcal{A}^{b_D}$ la *chiusura integrale*[1] di $\mathcal{A}$ rispetto a D in K, cioè:

$$\mathcal{A}^{b_D} := \bigcap \{\mathcal{A}V \mid V \in \mathrm{Zar}(D)\}.$$

[1]In realtà la chiusura integrale di $\mathcal{A}$ rispetto a D in K è definita da:

$$\overline{\mathcal{A}}^K := \{z \in K \mid \exists n \geq 1\ z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,\ a_i \in \mathcal{A}\}.$$

Se $\mathcal{A} = \mathfrak{a}$ è un ideale di D, $\overline{\mathfrak{a}}^K = \mathrm{rad}_{\overline{D}}(\mathfrak{a}\overline{D})$. Si dimostra però che $\overline{\mathcal{A}}^K = \mathcal{A}^{b_D}$, [ZS-75b, Corollary pag. 347].

La *b-topologia su* $Z(D)$ è definita prendendo come sottobase di aperti gli insiemi della forma:

$$\mathcal{U}_D(\mathcal{B},\mathcal{C}) := \left\{T \in Z(D) \,\middle|\, \mathcal{B} \subseteq (\mathcal{C}T)^{b_T} \right\},$$

dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono ideali frazionari finitamente generati di D (e quindi $\mathcal{C}T$ è un ideale frazionario finitamente generato di T). In caso $\mathcal{C} = D$, poniamo semplicemente

$$\mathcal{U}_D(\mathcal{B}) := \mathcal{U}(\mathcal{B}, D) = \{T \in Z(D) \,|\, \mathcal{B} \subseteq T\},$$

perché, se T è integralmente chiuso in K, $(DT)^{b_T} = \overline{T} = T$. Se $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)D$, con $x_1, \dots, x_n \in K$ poniamo:

$$\mathcal{U}_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{U}_D(\mathcal{B}).$$

Si osservi che tale notazione non è ambigua ed è coerente con quella introdotta in $\mathrm{Zar}(D)$, perché in tal caso

$$\mathcal{U}_D(x_1, \dots, x_n) = \{T \in Z(D) \,|\, x_1, x_2, \dots, x_n \in T\} = z\left(D\left[x_1, \dots, x_n\right]\right).$$

Proposizione 12.7. *Se D è un dominio di Prüfer allora $Z(D) = \mathrm{Zar}(D)$ e la b-topologia coincide con la topologia di Zariski.*

Dimostrazione. Tale risultato poggia sulle seguenti caratterizzazioni di un dominio di Prüfer.
Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) D è un dominio di Prüfer;

(ii) ogni sopraanello di D è integralmente chiuso;

(iii) ogni ideale (frazionario) di D è integralmente chiuso;

(iv) ogni ideale (frazionario) di D finitamente generato è integralmente chiuso.

Diamo per acquisita l'equivalenza di tali affermazioni (per una dimostrazione cfr. [G-72, Theorem 24.7 e Theorem 26.2]).
Allora presi comunque due ideali frazionari non nulli e finitamente generati $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di D si ha: $\mathcal{U}_D(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{U}_D(\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1})$. Infatti se D è un dominio di Prüfer ogni sopraanello di D è di Prüfer e ogni ideale frazionario finitamente generato e non nullo è invertibile, quindi $(\mathcal{B}T)^{b_T} = \mathcal{B}T$ ed inoltre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}T$ se e soltanto se $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} \subseteq T = D^{b_T}$. $\square$