Capitolo 1

Anelli locali

D'ora in avanti, salvo esplicita indicazione del contrario, ogni anello sarà inteso come anello commutativo unitario.
Ricordiamo che per un anello (commutativo unitario) sussiste il seguente:

Lemma di Krull-Zorn. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale proprio di un anello A, allora esiste un ideale massimale di A che contiene $\mathfrak{a}$.

Sia A un anello, denotiamo con $\mathcal{U}(A)$ l'insieme degli elementi invertibili di A.

Proposizione 1.1. *Sia A un anello. Le seguenti affermazioni sono tra di loro equivalenti:*

(a) *$A \setminus \mathcal{U}(A)$ è un ideale;*

(b) *$A \setminus \mathcal{U}(A)$ è un ideale massimale;*

(c) *A ha un unico ideale massimale.*

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). Sia $\mathfrak{a} := A \setminus \mathcal{U}(A)$ un ideale e sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A, con $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}$ (Lemma di Krull-Zorn). Dunque $\mathfrak{m} \supseteq A \setminus \mathcal{U}(A)$ e, d'altra parte, $\mathfrak{m} \cap \mathcal{U}(A) = \emptyset$. Da cui si ricava che $\mathfrak{m} = A \setminus \mathcal{U}(A)$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A, allora $\mathfrak{m} \cap \mathcal{U}(A) = \emptyset$, dunque $\mathfrak{m} \subseteq A \setminus \mathcal{U}(A)$. Essendo $A \setminus \mathcal{U}(A)$ un ideale (massimale), allora $\mathfrak{m} = A \setminus \mathcal{U}(A)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Se $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di A e se $x \in A \setminus \mathfrak{m}$, allora $x \in \mathcal{U}(A)$ (altrimenti l'ideale xA non sarebbe contenuto in alcun ideale massimale di A, fatto impossibile per il Lemma di Krull-Zorn). Dunque $A \setminus \mathcal{U}(A) \subseteq \mathfrak{m}$. L'inclusione opposta è banale. $\square$

Definizione 1.2. Un *anello locale* A è un anello che soddisfa a (ciasc)una delle condizioni equivalenti della Proposizione 1.1.

Se $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale dell'anello locale A, il campo $k(A) := \frac{A}{\mathfrak{m}}$ è detto *campo residuo dell'anello locale A*.

Nel seguito denoteremo con $(A, \mathfrak{m}, k(A))$, o con $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale, mettendo in evidenza il suo ideale massimale ed, eventualmente, il suo campo residuo.

Esempi 1.3. (a) Ogni campo è banalmente un anello locale (con ideale massimale (0)).

(b) Sia K un campo, $K[X]$ non è un anello locale (ad esempio gli ideali (X) e $(X-a)$ con $a \in K$, $a \neq 0$ sono entrambi massimali), essendo K un campo.

(c) L'anello delle serie formali $K[[X]]$ a coefficienti in un campo K è un anello locale avente come ideale massimale (X). Infatti, le serie formali non invertibili, cioè quelle di ordine ≥ 1, formano un ideale (più precisamente l'ideale generato da (X)); in altri termini $K[[X]] \setminus \mathcal{U}(K[[X]]) = (X)$.

(d) L'anello delle serie formali $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ in $n \geq 1$ indeterminate a coefficienti in un campo K è un anello locale con ideale massimale $(X_1, \ldots, X_n)$. Infatti, si dimostra senza difficoltà che una serie formale di $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ è invertibile se, e soltanto se, il suo termine noto è diverso da 0.

(e) Sia A un qualunque anello e $\mathfrak{p}$ un suo ideale primo. L'anello $A_{\mathfrak{p}}$ (anello delle frazioni di A rispetto alla parte moltiplicativa $A \setminus \mathfrak{p}$) è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.
In particolare:

(f) Sia $A := \mathbb{Z}$ e $\mathfrak{p} := (p)$ dove p è un numero primo, allora

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \nmid b \right\}$$

è un anello locale con ideale massimale

$$p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \mid a,\ p \nmid b \right\}.$$

(g) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ una varietà algebrica (affine o proiettiva) irriducibile. Allora, l'anello formato da tutte le funzioni razionali definite in un punto $x \in X$ è un anello locale, denotato usualmente con $\mathcal{O}_{X,x}$, avente come ideale massimale

$$\mathfrak{m}_{X,x} := \{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0 \}$$

(infatti, è subito visto che $f \notin \mathfrak{m}_{X,x}$ se e soltanto se f è invertibile in $\mathcal{O}_{X,x}$).

Definizione 1.4. Dati due anelli locali $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$, un *omomorfismo di anelli locali* (o, brevemente, *un omomorfismo locale*) è un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow B$ tale che $f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ (o, equivalentemente, $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$). Diremo, poi, che $(A, \mathfrak{m})$ è *dominato* da $(B, \mathfrak{n})$, se l'anello A è un sottoanello di B e l'inclusione è un omomorfismo locale (i.e., $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$).

È subito visto che la relazione di dominanza è una relazione d'ordine nella classe di tutti gli anelli locali.

Inoltre, se $(A, \mathfrak{m}, k(A))$ e $(B, \mathfrak{n}, k(B))$ sono due anelli locali e se B domina A (in simboli $A \prec B$) allora l'inclusione $A \hookrightarrow B$, passando ai quozienti, permette di definire un'inclusione di campi $k(A) \hookrightarrow k(B)$.

Esempi 1.5. (a) Se A è un sottoanello di un anello integro B, se $\mathfrak{q}$ è un ideale primo di B, allora $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ è un ideale primo di A e l'omomorfismo canonico:

$$A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

è un omomorfismo iniettivo di anelli locali (cioè $A_{\mathfrak{p}} \prec B_{\mathfrak{q}}$).

(b) Siano $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ due ideali primi di un anello A. Allora, l'omomorfismo canonico:

$$\varphi : A_{\mathfrak{q}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} (\cong (A_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}})$$

è un omomorfismo di anelli, ma *non* è un omomorfismo locale (perché $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}} \subsetneq \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$.

Osservazione 1.6. Si noti che nell'Esempio (1.5,(a)), l'ipotesi che B sia integro è essenziale. Infatti, pur essendo vero (anche nel caso B non integro) che l'omomorfismo canonico associato all'inclusione di A in B:

$$A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

è un omomorfismo locale, questo in generale non è iniettivo. (Si prenda, ad esempio, $A := K[x] := \frac{K[X]}{(X^2)}$ e $B := K[x, y] := \frac{K[X,Y]}{(X^2,XY)}$, con K campo ed X e Y due indeterminate su K. È ovvio che $A \subsetneq B$. Sia $\mathfrak{q} := xB$, dunque $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A = xA$. Evidentemente l'omomorfismo

$$A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

non è iniettivo, perché $x = \frac{x}{1} \longmapsto \frac{x}{1} = \frac{xy}{y} = 0 \in B_{\mathfrak{q}}$, essendo $yx = 0 \in B$ con $y \in B \setminus \mathfrak{q}$).