Appendice al Capitolo 6

Specializzazioni e preposti

In questa appendice vogliamo accennare ad una generalizzazione della nozione di posto, che ci sembra potenzialmente ricca di conseguenze, soprattutto dal punto di vista topologico, per stabilire legami tra gli spazi spettrali e le superficie di Riemann astratte.

Osservazione 6.10. Dare un posto P di un campo A a valori in un campo B (lasciamo cadere la richiesta di suriettività di P) equivale a dare un omomorfismo di anelli:

$$\pi := P\,|_{A_P}\colon\ A_P \longrightarrow B$$

dove A_P è un sottoanello di A tale che:

$$x, y \in A,\ xy \in A_P\ \ x \in A \setminus A_P \Rightarrow y \in \ker(\pi).$$

Questa osservazione suggerisce di dare la seguente

Definizione 6.11. Fissato un anello k. Una *specializzazione da una k-algebra A ad una k-algebra B* è un omomorfismo $\pi : A_\pi \longrightarrow B$, con A_π sotto-k-algebra di A tale che :

$$x, y \in A,\ xy \in A_\pi\ \ x \in A \setminus A_\pi \Rightarrow y \in \ker(\pi).$$

Ovviamente ogni omomorfismo di k-algebre $\pi : A \to B$ è una specializzazione con $A_\pi = A$.
La definizione di specializzazione, per analogia con quella di posto, si può dare come applicazione definita tra "proiettivizzazioni" delle k-algebre A e B. Sia $A_\infty := A \cup \{\infty\}$ e $B_\infty := B \cup \{\infty\}$. Si pone, per definizione, in A_∞:

$a + \infty := \infty + a := \infty, \quad \forall a \in A$
$-\infty := \infty$
$a \cdot \infty := \infty \cdot a := \infty, \quad \forall a \in A \setminus \{0\}$
$\infty \cdot \infty := \infty$
$c \cdot \infty := \infty, \quad \forall c \in k \setminus \ker(\rho_A)$

dove $\rho_A : k \to A$ è l'omomorfismo naturale che definisce la struttura di k-algebra su A.
Le altre possibili relazioni coinvolgenti elementi di A ed ∞ non sono definite. Analoghe uguaglianze si definiscono in B_∞. Dare una specializzazione π da una k-algebra A ad una k-algebra B equivale a dare un'applicazione:

$$\Pi :\ A_\infty \longrightarrow B_\infty$$

tale che:

$\Pi(1) = 1$
$\Pi(\infty) = \infty$
$\Pi(x+y) \overset{*}{=} \Pi(x) + \Pi(y), \quad \forall x, y \in A_\infty$
$\Pi(xy) \overset{*}{=} \Pi(x)\Pi(y), \quad \forall x, y \in A_\infty$
$\Pi(cx) \overset{*}{=} c\Pi(x) \quad \forall c \in k,\, x \in A_\infty$
$(*)$ quando il secondo membro è definito.

Per semplicità denotiamo con

$$\pi : A \dashrightarrow B$$

una specializzazione da una k-algebra A ad una k-algebra B, ricordandoci che π non è una vera applicazione (lo è $\pi : A_\pi \to B$ oppure $\Pi : A_\infty \to B_\infty$).
Date due specializzazioni

$$\pi : A \dashrightarrow B \qquad\qquad \sigma : B \dashrightarrow C$$

è chiaro cosa si intende per loro composizione $\sigma \circ \pi : A \dashrightarrow C$ (non è altro che la vera composizione delle applicazioni canonicamente associate $\Pi : A_\infty \dashrightarrow B_\infty$ con $\Sigma : B_\infty \dashrightarrow C_\infty$). È chiaro che così facendo la categoria delle k-algebre e degli omomorfismi di k-algebre $\mathbf{Alg}_k$ è una sottocategoria della categoria $\mathbf{Sp}_k$ che ha come oggetti le k-algebre e come morfismi le specializzazioni.

Definizione 6.12. Un *preposto*

$$\pi : A \dashrightarrow B$$

è una specializzazione che ha come codominio B un campo.

Un *primo* $\mathcal{P}$ *di* A o, più precisamente, un *primo di* A *definito su* k è un sotto-k-modulo di A che è nucleo di un qualche preposto di dominio A (cioè $\mathcal{P}$ è un ideale primo di un qualche anello A_π, con $\pi : A \dashrightarrow B$, preposto, in quanto $\mathcal{P} = \ker(\pi)$, con $\frac{A_\pi}{\ker(\pi)}$ isomorfo ad un sottoanello, $\pi(A_\pi)$, del campo B).

Un *posto* $\pi : A \dashrightarrow B$ è un preposto (quindi B è un campo) tale che soddisfa alla seguente proprietà di universalità:

($\bullet$) se $\pi' : A \dashrightarrow B'$ è un altro preposto, con $\ker(\pi') = \ker(\pi)$, allora deve esistere un unico isomorfismo di k-algebre $\sigma : B \to B'$ in modo tale che:

$$\pi'(a) \overset{*}{=} \sigma(\pi(a))$$

((*) quando il secondo membro è definito).

Si noti che la condizione ($\bullet$) implica che $A_\pi \subseteq A_{\pi'}$.

Si possono agevolmente dimostrare le seguenti affermazioni (per dettagli cfr. [Co-68]):

Proposizione 6.13. *Sia A una k-algebra. Una sotto-k-algebra $\mathcal{P}$ di A è un primo se, e soltanto se,*

(a) $1 \notin \mathcal{P}$;

(b) $\mathcal{P}$ *è moltiplicativamente chiuso;*

(c) $A \setminus \mathcal{P}$ *è moltiplicativamente chiuso.*

Proposizione 6.14. *Fissato un primo $\mathcal{P}$ di una k-algebra A, allora nell'insieme:*

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\mathcal{P}) := \left\{ A' \;\middle|\; \begin{array}{l} A' \text{ sotto-}k\text{-algebra di } A \\ \mathcal{P} \text{ è un ideale (primo) di } A' \\ x, y \in A,\ xy \in A',\ x \notin A' \Rightarrow y \in \mathcal{P} \end{array} \right\}$$

che è non vuoto (almeno $A_\pi \in \mathcal{A}$, se $\pi : A \dashrightarrow B$ è un preposto tale che $\mathcal{P} = \ker(\pi)$) esiste un elemento più grande di tutti:

$$A^{\mathcal{P}} := (\mathcal{P} :_A \mathcal{P}) := \{a \in A \mid a\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}\}$$

ed un elemento più piccolo di tutti:

$${}^{\mathcal{P}}\!A := \bigcap \{A' \mid A' \in \mathcal{A}\}.$$

□

Proposizione 6.15. *Conserviamo le notazioni della Proposizione 6.14. Sia $Pr_k(A)$ l'insieme dei primi di una k-algebra A e sia $S_k(A)$ l'insieme delle classi d'equivalenza di posti definiti sulla k-algebra A. Allora, l'applicazione:*

$$\begin{array}{ccc} Pr_k(A) & \longrightarrow & S_k(A) \\ \mathcal{P} & \longmapsto & [\vartheta_{\mathcal{P}}] \end{array}$$

dove $[-]$ è la classe d'equivalenza del posto di A canonicamente associato all'omomorfismo naturale:

$$\vartheta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \twoheadrightarrow \frac{{}^{\mathcal{P}}\!A}{\mathcal{P}} \hookrightarrow Qz\left(\frac{{}^{\mathcal{P}}\!A}{\mathcal{P}}\right)$$

è una biiezione. □

Se A è un campo, che è una k-algebra, allora in tal caso, per ogni primo $\mathcal{P}$ di A,

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \left\{A^{\mathcal{P}}\right\},$$

quindi ${}^{\mathcal{P}}\!A = A^{\mathcal{P}}$ ed è una sotto-k-algebra di A, che è un anello di valutazione, avente come campo dei quozienti A (in quanto: $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \in A^{\mathcal{P}}$, $x, \frac{1}{x} \in A$, $x \notin A^{\mathcal{P}} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{P}$). Pertanto, ciò spiega - a posteriori - perché la proprietà di universalità ($\bullet$) che distingue i preposti dai posti, nel caso in cui A è un campo, non è essenziale.

Notiamo, infine, che nel caso in cui A sia un campo e $\mathcal{P}$ un primo di A, allora $A^{\mathcal{P}}$ è un anello di valutazione con ideale massimale $\mathcal{P}$. Inoltre, $A^{\mathcal{P}}$ determina univocamente $\mathcal{P}$ (come suo ideale massimale).

Torneremo in seguito su $Pr_k(A)$ e su $S_k(A)$ nell'intento di studiare topologicamente tali insiemi e confrontarli con $\mathrm{Spec}(A)$, spettro primo di A dotato della topologia di Zariski.

I risultati contenuti in questa appendice sono stati dimostrati da I.G. Connell, [Co-68].