# Appendice al Capitolo 3

# Caso classico delle valutazioni con gruppo di valori in $\mathbb{R}$: valori assoluti ultrametrici

Allo scopo di motivare l'introduzione della definizione classica di valutazione (di rango 1), da cui è derivata la definizione generale di valutazione data nel Capitolo 3, partiamo dalla nozione di valore assoluto in $\mathbb{Q}$ ed esaminiamo alcune sue estensioni. Cominciamo con il richiamare le proprietà fondamentali della funzione valore assoluto $|...| : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$:

(VA.1) $|x| \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{Q}$, e $|x| = 0$ se e soltanto se $x = 0$;

(VA.2) $|xy| = |x|\,|y|$, presi comunque $x, y \in \mathbb{Q}$;

(VA.3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare), presi comunque $x, y \in \mathbb{Q}$.

Adesso, procediamo nella descrizione di altre funzioni da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$ che verificano le proprietà (VA.1), (VA.2) e (VA.3).
Fissiamo $c \in \mathbb{R}$ con $0 < c < 1$. Sia $p$ un numero primo. Per ogni numero $z \in \mathbb{Q}$, $z \neq 0$, sappiamo che possiamo scrivere:

$$z = p^n \frac{a}{b} \text{ con } n, a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ p \nmid a \text{ e } p \nmid b.$$

Poniamo

$$|z|_{p,c} := |z|_p := c^n \quad \text{e} \quad |0|_{p,c} = |0|_p = 0.$$

È immediato verificare che la funzione $|...|_{p,c} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica (VA.1) e (VA.2). Inoltre, tale funzione verifica la seguente proprietà, detta *disuguaglianza non-archimedea*:

$$\text{(VA.3}^{\#}\text{)} \qquad |x + y|_{p,c} \leq \max(|x|_{p,c}\,, |y|_{p,c}), \text{ presi comunque } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Tale disuguaglianza è molto più restrittiva di (VA.3), in quanto ovviamente (in $\mathbb{R}$),

$$\max(|x|_{p,c}\,, |y|_{p,c}) \leq |x|_{p,c} + |y|_{p,c}\,.$$

Per mostrare che $|...|_{p,c}$ verifica (VA.3$^{\#}$), dimostriamo che (VA.3$^{\#}$) è equivalente alla seguente proprietà:

$$\text{(U}_1\text{)} \qquad |x|_{p,c} \leq 1 \Rightarrow |x + 1|_{p,c} \leq 1, \text{ per ogni } x \in \mathbb{Q},$$

e, poi, dimostriamo che $|\ldots|_{p,c}$ soddisfa (U$_1$).
(VA.3$^{\#}$) $\Rightarrow$ (U$_1$): se $|x|_{p,c} \leq 1$, allora per (VA.3$^{\#}$) si ha:

$$|x + 1|_{p,c} \leq \max(|x|_{p,c}\,, |1|_{p,c}) = \max(|x|_{p,c}\,, 1) = 1.$$

$(U_1) \Rightarrow (VA.3^{\#})$: siano $x, y \in \mathbb{Q}$. Se $y = 0$ allora è banale che $|x+y|_{p,c} = |x|_{p,c} = \max(|x|_{p,c}, 0)$.
Sia $y \neq 0$. A meno di scambiare $x$ con $y$, possiamo assumere anche che $|x|_{p,c} \leq |y|_{p,c}$. Pertanto $\left|\frac{x}{y}\right|_{p,c} \leq 1$. Applicando $(U_1)$, possiamo concludere che $\left|1 + \frac{x}{y}\right|_{p,c} \leq 1$. Dunque $|x+y|_{p,c} \leq |y|_{p,c} = \max(|x|_{p,c}, |y|_{p,c})$.
Dimostriamo, infine, che $|...|_{p,c}$ soddisfa la condizione $(U_1)$.
Sia $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$. Se $|x|_{p,c} \leq 1$, allora per la scelta di $c$, $x = p^n \frac{a}{b}$ con $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $p \nmid a$, $p \nmid b$.
Pertanto, $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ e quindi $1 + x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ dunque $1 + x = p^m \frac{a'}{b'}$ con $m \geq 0$, $a', b' \in \mathbb{Z}$, $b' \neq 0$, $p \nmid a'$ e $p \nmid b'$, dunque $|1+x|_{p,c} = c^m \leq 1$.

(Più precisamente, si noti che, dato $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$,

$$|x|_{p,c} < 1 \Longleftrightarrow x \in p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Pertanto,

$$|x|_{p,c} = 1 \Longleftrightarrow x \in \mathcal{U}\left(\mathbb{Z}_{(p)}\right).$$

Quindi, $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; |x|_{p,c} \leq 1\right\}$.
Ricordando che, dato un anello locale $(A, \mathfrak{m})$, allora

$$a \in \mathfrak{m} \Longleftrightarrow 1 + ab \in \mathcal{U}(A) \text{ per ogni } b \in A,$$

nel caso dell'anello locale $\left(\mathbb{Z}_{(p)}, p\mathbb{Z}_{(p)}\right)$, si dimostra facilmente che:

$$|x|_{p,c} < 1 \Longleftrightarrow |1 + xy|_{p,c} = 1, \text{ per ogni } y \in \mathbb{Q} \text{ con } |y|_{p,c} \leq 1.$$

Nel caso in cui $|x|_{p,c} = 1$, allora come abbiamo visto sopra $|1+x|_{p,c} \leq 1$ e può accadere sia che $|1+x|_{p,c} < 1$, sia che $|1+x|_{p,c} = 1$. Ad esempio, se $p = 5$ e $x = \frac{2}{3}$, allora $\left|\frac{2}{3}\right|_{5,c} = 1$ mentre $\left|1 + \frac{2}{3}\right|_{5,c} = \left|\frac{5}{3}\right|_{5,c} < 1$; se, poi, $x = \frac{1}{3}$ allora $\left|\frac{1}{3}\right|_{5,c} = 1$ e $\left|1 + \frac{1}{3}\right|_{5,c} = \left|\frac{4}{3}\right|_{5,c} = 1$.)

È facile ora raccordare la funzione $|...|_{p,c} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita sopra con la valutazione $p$-adica $v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$ (Esempio 3.10 (4)).
Infatti, per ogni $z \in \mathbb{Q}$, $z \neq 0$, si ha:

$$v_p(z) = \log_c\left(|z|_{p,c}\right).$$

In altri termini, se $\Delta_0 = \mathrm{Im}\left(|...|_{p,c}\right)$ allora $|...|_{p,c} : \mathbb{Q} \longrightarrow \Delta_0$ è una valutazione equivalente alla valutazione $p$-adica $v_p$ (tramite l'isomorfismo di gruppi ordinati $\log_c : (\Delta, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ che ha come inverso l'isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \exp_c : (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\Delta, \cdot) \\ n & \longmapsto & c^n). \end{array}$$

A partire dalla funzione $|...|_{p,c}$ o, più generalmente, da una funzione $\|...\| : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica (VA.1), (VA.2) e $(VA.3^{\#})$ detta *valore assoluto non-archimedeo*, possiamo introdurre una "metrica", definendo:

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array}$$

Chiaramente la funzione $d$ verifica le seguenti proprietà:

(d.1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(d.2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(d.$3^{\#}$) $d(x,z) \leq \max\left(d(x,y), d(y,z)\right)$,

presi comunque $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Da (d.$3^{\#}$) discende facilmente che $d$ soddisfa anche, in particolare,

$$\text{(d.3)} \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

presi comunque $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Notiamo che se $\|...\| : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che verifica (VA.1), (VA.2) e (VA.3) allora la funzione distanza $d$ associata a tale valore assoluto di tipo generale verifica (d.1), (d.2) e (d.3).
Una funzione $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni (d.1), (d.2) e (d.3) (risp. (d.1), (d.2) e (d.$3^{\#}$)) si chiama una *distanza* (risp. una *distanza ultrametrica*).
Un insieme $X$ assieme ad una funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica le condizioni (d.1), (d.2) e (d.3) (risp. (d.1), (d.2) e (d.$3^{\#}$)) si chiama uno *spazio metrico* (risp. uno *spazio ultrametrico*).
Si noti che, adattando l'enuncato della Proposizione 3.12 (d), si ha che, se $(X, d)$ è uno spazio ultrametrico, allora, dati comunque $x, y, z \in X$ con $d(x,y) \neq d(y,z)$, si ha:

$$d(x,z) = \max\left(d(x,y), d(y,z)\right).$$

Tale uguaglianza ha una interpretazione geometrica, cioè *ogni triangolo in uno spazio ultrametrico è isoscele e la sua base ha lunghezza inferiore od uguale a quella dei suoi lati uguali.*