AL4 - Numeri algebrici - A.A. 2007/2008

II Prova di valutazione in classe

Avvertenze. *Svolgere il tema in modo chiaro, conciso ed esauriente, utilizzando al massimo 3 facciate di un foglio protocollo.*
Svolgere l'esercizio utilizzando al massimo 2 facciate di un foglio protocollo.

Tema. Il gruppo degli ideali frazionari non nulli ed il gruppo delle classi dell'anello degli interi di un campo di numeri algebrici.

Esercizio. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

(a) Determinare l'anello degli interi $\mathcal{O}_K$ ed il discriminante Δ_K di $\mathcal{O}_K$.

(b) Mostrare che le equazioni $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ determinano due fattorizzazioni distinte 6 come prodotto di elementi irriducibili dell'anello degli interi algebrici $\mathcal{O}_K$. Mostrare inoltre che $\{2,\ 3,\ 1+\sqrt{-5},\ 1-\sqrt{-5}\}$, a meno di associati, sono tutti e soli gli elementi irriducibili di $\mathcal{O}_K$ che dividono 6.

(c) Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostrare che:

$$\sqrt{-5} \mid (a + b\sqrt{-5}) \text{ (nell'anello } \mathcal{O}_K) \ \Leftrightarrow\ 5 \mid a \text{ (nell'anello } \mathbb{Z}).$$

(d) Utilizzando **(c)** , mostrare che $\sqrt{-5}$ è un elemento primo di $\mathcal{O}_K$ e che 5 possiede una fattorizzazione unica come prodotto di primi di $\mathcal{O}_K$(nonostante che $\mathcal{O}_K$ non sia un UFD).

(e) Si considerino gli ideali

$$P := (2, 1+\sqrt{-5})\mathcal{O}_K\,,\quad Q_1 := (3, 1+\sqrt{-5})\mathcal{O}_K\,,\quad Q_2 := (3, 1-\sqrt{-5})\mathcal{O}_K\,.$$

(e$_1$) Determinare delle $\mathbb{Z}$–basi per gli ideali P, Q_1 e Q_2 cioè, in altre parole, determinare α_1, α_2; β_1, β_2; $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{O}_K$ in modo tale che

$$P = \alpha_1\mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z}\,,\quad Q_1 = \beta_1\mathbb{Z} + \beta_2\mathbb{Z}\,,\quad Q_2 = \gamma_1\mathbb{Z} + \gamma_2\mathbb{Z}\,.$$

[Suggerimento: Calcolare $\sqrt{|\Delta(2, 1+\sqrt{-5})|/|\Delta_K|}$, $\sqrt{|\Delta(3, 1+\sqrt{-5})|/|\Delta_K|}$, $\sqrt{|\Delta(3, 1-\sqrt{-5})|/|\Delta_K|}$).]

(e$_2$) Calcolare le norme $\mathrm{N}_K(P)\,,\ \mathrm{N}_K(Q_1)\,,\ \mathrm{N}_K(Q_2)$ e mostrare che gli ideali $P\,,\ Q_1\,,\ Q_2$ sono ideali primi di $\mathcal{O}_K$.

(f) Determinare gli esponenti $(e, e_1, e_2;\ f, f_1, f_2;\ g, g_1, g_2 \geq 0)$ in modo tale che

$$2\mathcal{O}_K = P^e Q_1^{e_1} Q_2^{e_2}\,,\ \ 3\mathcal{O}_K = P^f Q_1^{f_1} Q_2^{f_2}\,,\ \ 6\mathcal{O}_K = P^g Q_1^{g_1} Q_2^{g_2}\,.$$

(g) Determinare una fattorizzazione in ideali primi di $\mathcal{O}_K$ dell'ideale principale (non primo) $5\mathcal{O}_K$.