

---

AL4 - Numeri algebrici - A.A. 2007/2008

I Prova di valutazione in classe

---

**Avvertenze.** *Svolgere il tema in modo chiaro, conciso ed esauriente, utilizzando al massimo 3 facciate di un foglio protocollo.*

*Svolgere l'esercizio utilizzando al massimo 2 facciate di un foglio protocollo.*

**Tema.** Basi intere in campi di numeri algebrici, con particolare riferimento al caso dei campi quadratici (ampliamenti di grado 2 del campo  $\mathbb{Q}$ ).

**Esercizio.** Sia  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ .

- (a) Determinare (dando una breve descrizione del metodo seguito)
  - (a.1) un elemento  $\theta \in K$  (o, meglio, elemento dell'anello degli interi  $\mathcal{O}_K$ ) in modo tale che  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ;
  - (a.2) il polinomio minimo  $p_\theta$  dell'elemento  $\theta$  (su  $\mathbb{Q}$ , o meglio a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ ).
- (b) Descrivere tutte le (quattro) immersioni di  $K$  in  $\mathbb{C}$  che fissano il sottocampo  $\mathbb{Q}$ .
- (c) Posto  $\alpha := \sqrt{2}$  e  $\beta := \sqrt{5}$ , determinare  $N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)$ ,  $N_{K|\mathbb{Q}}(\beta)$ ,  $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)$ ,  $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\beta)$  ed i polinomi di campo  $f_{\alpha, K|\mathbb{Q}}$  e  $f_{\beta, K|\mathbb{Q}}$ .
- (d) Descrivere la relazione che intercorre tra i polinomi minimi  $p_\alpha$ ,  $p_\beta$  e  $p_\theta$  con –rispettivamente– i polinomi di campo  $f_{\alpha, K|\mathbb{Q}}$ ,  $f_{\beta, K|\mathbb{Q}}$ , e  $f_{\theta, K|\mathbb{Q}}$ .
- (e) Calcolare il discriminante  $\Delta(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$  utilizzando la formula della norma della derivata del polinomio minimo.