
AL4 - Numeri algebrici - A.A. 2007/2008

I Prova di valutazione in classe

Avvertenze. *Svolgere il tema in modo chiaro, conciso ed esauriente, utilizzando al massimo 3 facciate di un foglio protocollo.*

Svolgere l'esercizio utilizzando al massimo 2 facciate di un foglio protocollo.

Tema. Basi intere in campi di numeri algebrici, con particolare riferimento al caso dei campi quadratici (ampliamenti di grado 2 del campo \mathbb{Q}).

Esercizio. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

- (a) Determinare (dando una breve descrizione del metodo seguito)
 - (a.1) un elemento $\theta \in K$ (o, meglio, elemento dell'anello degli interi \mathcal{O}_K) in modo tale che $K = \mathbb{Q}(\theta)$;
 - (a.2) il polinomio minimo p_θ dell'elemento θ (su \mathbb{Q} , o meglio a coefficienti in \mathbb{Z}).
- (b) Descrivere tutte le (quattro) immersioni di K in \mathbb{C} che fissano il sottocampo \mathbb{Q} .
- (c) Posto $\alpha := \sqrt{2}$ e $\beta := \sqrt{5}$, determinare $N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)$, $N_{K|\mathbb{Q}}(\beta)$, $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)$, $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\beta)$ ed i polinomi di campo $f_{\alpha, K|\mathbb{Q}}$ e $f_{\beta, K|\mathbb{Q}}$.
- (d) Descrivere la relazione che intercorre tra i polinomi minimi p_α , p_β e p_θ con –rispettivamente– i polinomi di campo $f_{\alpha, K|\mathbb{Q}}$, $f_{\beta, K|\mathbb{Q}}$, e $f_{\theta, K|\mathbb{Q}}$.
- (e) Calcolare il discriminante $\Delta(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$ utilizzando la formula della norma della derivata del polinomio minimo.