

---

**AL3 - Anelli commutativi ed ideali - A.A. 2006/2007**  
**Valutazione “in itinere”, Novembre 2006**

---

**AVVERTENZE :** Svolgere il tema in classe, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso.

**TEMA:** *Anello delle frazioni e localizzazioni. Principali proprietà ed esempi.*

**ESERCIZIO 1.** Sia  $K$  un campo. Si consideri l'anello:

$$A := K[x, y] := K[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$$

(dove  $x := X + (X^2, XY, Y^2)$  ed  $y := Y + (X^2, XY, Y^2)$ ).

- (a) Determinare  $\text{rad}((X^2, XY, Y^2))$  in  $K[X, Y]$  e descrivere l'anello ridotto  $A/\text{Nilp}(A)$  (dove  $\text{Nilp}(A)$  è l'insieme degli elementi nilpotenti di  $A$  ovvero il radicale primo dell'anello  $A$ ).
- (b) Determinare il gruppo degli elementi invertibili dell'anello  $A$ .
- (c) Determinare tutti gli ideali principali (non banali) di  $A$ .
- (d) Determinare tutti gli ideali non principali di  $A$ .
- (e) Descrivere  $\text{Spec}(A)$ .

**ESERCIZIO 2.** Sia  $\mathbb{Z}$  l'anello degli interi e sia  $\mathbb{Q}$  il campo dei numeri razionali. Si consideri l'anello prodotto diretto  $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$ .

- (a) Determinare  $\text{rad}(12\mathbb{Z})$  in  $\mathbb{Z}$  e descrivere l'anello ridotto  $A/\text{Nilp}(A)$ .
- (b) Determinare tutti gli elementi idempotenti di  $A$ .
- (c) Determinare tutti gli ideali di  $A$ . Sono tutti principali?
- (d) Determinare tutti gli ideali primi di  $A$  e tra questi gli ideali massimali. Esistono in  $A$  ideali primi non massimali?
- (e) Sia  $P' := 3\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$  e  $P'' := \mathbb{Z} \times (3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$ . Mostrare che  $P'$  e  $P''$  sono ideali primi (massimali) di  $A$ . Descrivere, tramite anelli di frazioni o/e anelli-quoziente di  $\mathbb{Z}$ , le localizzazioni  $A_{P'}$  e  $A_{P''}$ .