AL3 - Fondamenti di algebra commutativa - A.A. 2007/2008
II Prova scritta di valutazione in classe

AVVERTENZE : *Svolgere il tema, utilizzando al più 3 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso.*

Svolgere almeno *un esercizio utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo.*

TEMA: Anelli noetheriani, ideali irriducibili, ideali primari e decomposizione di ideali propri in una intersezione finita di ideali primari. Applicazioni alla geometria algebrica affine.

ESERCIZIO 1. Sia D un sopranello di $\mathbb{Z}$ (cioè un sottoanello del campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, contenente come sottoanello l'anello degli interi $\mathbb{Z}$, ovvero $\mathbb{Z} \subseteq D \subseteq \mathbb{Q}$).

(a) Verificare che $S_D := \{s \in \mathbb{Z} \mid 1/s \in D\}$ è una parte moltiplicativa di $\mathbb{Z}$.

(b) Dimostrare che D è un anello di frazioni di $\mathbb{Z}$ e, più precisamente, $D = S_D^{-1}\mathbb{Z}$.

(c) Stabilire se ogni sopranello D di $\mathbb{Z}$ è noetheriano.

(d) Definire esplicitamente la dimensione di Krull di un anello e determinare il più piccolo intero n tale che per ogni sopranello D di $\mathbb{Z}$ risulti $\dim(D) \leq n$.

(e) Sia $D := \mathbb{Z}_{(2)} \cap \mathbb{Z}_{(3)}$. Determinare esplicitamente in questo caso S_D.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathbb{Q}[X]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata X a coefficienti nel campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

(a) Verificare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[X]_{(X-\alpha)}$ è un dominio di valutazione.

(b) Descrivere lo spettro primo di $\mathbb{Q}[X]_{(X-1)} \cap \mathbb{Q}[X]_{(X+1)}$ e descriverne esplicitamente tutti gli aperti nella topologia di Zariski.

(c) Sia I un ideale di un anello A. Si supponga che I non sia finitamente generato e che I sia massimale nell'insieme di tutti gli ideali (propri) di A che non sono finitamente generati. Dimostrare che I è un ideale primo di A.

Dedurre da questo che un anello A è noetheriano se e soltanto se ogni suo ideale primo è finitamente generato.

(d) Stabilire se l'anello $\mathbb{Q}[X]_{(X-1)} \cap \mathbb{Q}[X]_{(X+1)}$ è un anello noetheriano oppure no.