Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL1 - Algebra 1
Tutorato 8
Mercoledì 24 novembre 2004

1. Date le applicazioni $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite nella seguente maniera:
$$f(x) := \begin{cases} 4x+1, & \text{se } x \geq 0 \\ x+3, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 3x, & \text{se } x \geq 0 \\ x+3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
   (a) Determinare esplicitamente le applicazioni $g \circ f$, $f \circ g$;
   (b) Mostrare che $g \circ f$ è una biiezione, definendo la sua applicazione inversa;
   (c) Mostrare che $f \circ g$ non è iniettiva né suriettiva.

2. Sia $X := \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e sia $f : X \to X$, con $f(x) := 1 - \frac{1}{x}$:
   (a) Dimostrare che l'applicazione $f(x)$ è una biiezione;
   (b) Verificare che $f \circ f \circ f(x) = id_X(x)\, \forall x \in X$.

3. Determinare quali tra le seguenti applicazioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sono iniettive, quali suriettive e quali biiettive:
   (a) $f(x) := x^4$;
   (b) $f(x) := x$, se x è pari, mentre $f(x) := x - 1$, se x è dispari;
   (c) $f(x) := x- \mid x \mid$;
   (d) $f(x) := \frac{x}{2}$, se x è pari, mentre $f(x) := 4$, se x è dispari;
   (e) $f(x) := 2x + 1$, se $x \geq 0$, mentre $f(x) := 3x + 1$, se $x < 0$.

4. Sia $A := \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $B := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e sia
$$f : A \to B, \quad x \mapsto \frac{x-3}{x-2}.$$
   Dimostrare che f è biunivoca e determinare esplicitamente la sua applicazione inversa $f^{-1} : B \to A$.

5. Si consideri l'applicazione:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \langle\langle x \rangle\rangle.$$
   Dove $\langle\langle x \rangle\rangle$ denota la parte intera di x, cioè $x = \langle\langle x \rangle\rangle + r,\ 0 \leq r < 1$. Se ρ_f è la relazione d'equivalenza associata a f, cioè:
$$x \rho_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y),$$
   (a) Determinare esplicitamente la classe di equivalenza di ogni elemento di $\mathbb{R}$;
   (b) Determinare l'insieme quoziente $\mathbb{R}/\rho_f$;
   (c) Applicare il teorema di decomposizione per le funzioni.

6. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (xy, 1).$$

Si consideri poi la relazione di equivalenza associata a f.

(a) Determinare l'immagine di f;

(b) Determinare la classe d'equivalenza rispetto a ρ_f di ogni elemento di $\mathbb{R}^2$;

(c) Descrivere esplicitamente la biiezione canonica $\mathbb{R}^2/\rho_f \leftrightarrow Im(f)$.

7. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) := MCD(n, 21).$$

(a) Determinare $Im(f)$ e verificare che f non è iniettiva;

(b) Determinare tutte le classi di equivalenza di $\mathbb{N}$ rispetto alla relazione ρ_f associata a f, definita su $\mathbb{N}$ da:

$$n \rho_f m \Leftrightarrow MCD(n, 21) = MCD(m, 21).$$