Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL1 - Algebra 1
Tutorato 2
Mercoledì 6 Ottobre 2004

1. Dimostrare usando il principio di induzione la validità delle seguenti formule:
   (a) $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$;
   (b) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $3^{2n} - 1$ è un multiplo di 8;
   (c) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $2^n \geq n + 1$.

2. Mostrare la proprietà archimedea di $\mathbb{Z}$, ovvero:
$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0, \quad \exists n \in \mathbb{Z} : a < nb.$$

3. Usando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, determinare il massimo comun divisore delle seguenti coppie di numeri e almeno due differenti identità di Bézout per esso:
$$(2725, 325); \quad (-960, 330); \quad (15, 2225); \quad (-752, -428).$$

4. Siano a, $b \in \mathbb{Z}$, $d := MCD(a, b)$ e $m := mcm(a, b)$. $\forall h, k \in \mathbb{Z}$, definiamo:
$$h\mathbb{Z} := \{hz \mid z \in \mathbb{Z}\} \quad e \quad h\mathbb{Z} + k\mathbb{Z} := \{hx + ky \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$
   Mostrare che:
   (a) $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid a$;
   (b) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$;
   (c) $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$;
   (d) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$;
   (e) $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \mid b$ oppure $b \mid a$;

5. Se $A := \{x \in \mathbb{Z} : x \mid 24\}$, $B := \{6, -3, 4, -2\}$ e $C := \{4, -8, 2, 12, 6\}$, determinare:
   (a) $D = \mathcal{C}_A(B)$;
   (b) $B \Delta C$.

6. Costruire l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ per i seguenti insiemi:
$$X := E = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}, \quad X := F = \{x, y\}$$
   .

7. Siano $A := \left\{x \in \mathbb{C} : x^4 - 13x^2 + 36 = 0\right\}$ e $B := \{x \in \mathbb{Z} : x \mid 18\}$ due insiemi, determinare quali delle seguenti affermazioni è vera:
$$A = B, \quad A \subset B, \quad B \subset A$$

8. Siano $A := \left\{x \in \mathbb{C} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\right\}$ e $B := \{-1, 1, 2\}$; verificare che $A = B$.