Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005

ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 1- Andrea Cova (29 settembre 2004)

1. Sia A un insieme qualsiasi, definiamo:
   P(A) := □X : X è un sottoinsieme di A□.
   Dati due insiemi A e B, stabilire se le seguenti identità sono sempre vere:
   P(A) □ P(B) = P(A □ B) ; P(A) □ P(B) = P(A □ B).

2. Sia X un insieme non vuoto. Presi comunque due sottoinsiemi A, B di X si ponga:
   A □ B := (A □ B) \ (A □ B) (*differenza simmetrica).*
   Dati A , B , C tre sottoinsiemi di X, dimostrare che:
   (A □ B) \ C = (A \ C) □ (B \ C).

3. Se A, B, C sono sottoinsiemi di un insieme fissato X, allora determinare quali tra le seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*:
   (a) risulta sempre A □ (B □ C) = (A □ B) □ C;
   (b) non si ha mai che A □ (B □ C) = (A □ B) □ C;
   (c) se C □ A allora A □ (B □ C) = (A □ B) □ C.

4. Supponiamo che siano 500 gli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Matematica.
   Supponiamo che, tra loro, 450 conoscano l'inglese e 120 il francese. Supponiamo inoltre che ogni studente conosca almeno una di queste due lingue. Determinare il numero degli studenti che conoscono entrambe le lingue.
   [Suggerimento : Sia S un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi).
   Denotiamo con Card (S) il numero degli elementi distinti di S.
   Sia X un insieme finito ed A e B due sottoinsiemi di X.
   Allora si ha che: Card (A □ B) = Card (A) + Card (B) – Card (A □ B).]

5. Supponiamo che si conoscano le seguenti informazioni su un dato insieme non vuoto X di persone:
   (1) Alcuni di coloro che amano i cani non amano i gatti;
   (2) Alcuni di coloro che non amano i canarini amano i cani
   Stabilire se le seguenti affermazioni possono essere dedotte da tali informazioni.
   (a) Esiste almeno una persona che non ama i canarini e non ama i gatti;
   (b) Esiste almeno una persona che non ama i canarini ed ama i gatti.

6. Sia S un insieme non vuoto. Nell'insieme X: = P(S) si considerino gli insiemi A, B e C
   Mostrare che:
   (a) A □ B = B □ A; **(b)** A □ ∅ = A; **(c)** A □ A = ∅; **(d)** (A □ B)*= (A*□ B*) □ (A □ B);
   (e) (A □ B) □ C = A □ (B □ C); **(f)** A □ B = (A □ B) □ (A □ B); **(g)** A □ (B □ C) = (A □ B) □ (A □ C).
   (dove con A* si denota l'insieme complementare S\A)

7. Presi A, B e C sottoinsiemi di un insieme finito X. Mostrare che:
   Card (A □ B □ C) = Card (A) + Card (B) + Card (C) – Card (A □ B) – Card (A □ C) – Card (B □ C) +
   Card (A □ B □ C). (Sfruttare anche in questo caso il suggerimento proposto nell'esercizio n° 4)

8. Siano x,y,z □**Z** con z ≠ 0. Mostrare che:
   xz =yz □ x = y,(*legge di cancellazione*).

9. Per ogni x □ **R**, sia |x| il *valore assoluto* (o *modulo*) di x, così definito:
   |x|: = x, se x ≥ 0
   -x, se x < 0.
   Mostrare che, presi comunque x,y,z □ **R**,
   (a) |x +y| □ |x| + |y|;
   (b) |x –y| □ |x-z| + |y –z|;
   (c) |xy| = |x||y|;
   (d) ||x| - |y|| □ |x-y|.