AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2004/2005

Valutazione "in itinere" - I Prova (una delle varie versioni proposte in classe)

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ [ ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	7	8.1	8.2	9
punti max	2	3	3	3	3	3	4	3	4	3	5	3	3	3	7
punti assegnati															
totale															

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **due punti ulteriori** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO 1. Dati comunque tre insiemi A, B e C. Dimostrare (tramite la doppia inclusione) che vale una e soltanto una delle seguenti uguaglianze:
(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ESERCIZIO 2. (1) Scrivere in base 10 i seguenti due numeri scritti in base 5:

$$a := (123)_5 \, , \quad b := (1432)_5 \, .$$

(2) Scrivere in base 5 ed in base 2 il numero $a + b$ (spiegando brevemente il procedimento seguito).

ESERCIZIO 3. Sia $\boldsymbol{\varepsilon}$ la relazione definita sull'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nella maniera seguente:

$$(x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x', y') \ :\Leftrightarrow \ x - x' \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y - y' \in \mathbb{Q} \, .$$

(1) Verificare che $\boldsymbol{\varepsilon}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(2) Descrivere esplicitamente la classe di equivalenza, relativamente a $\boldsymbol{\varepsilon}$, dell'elemento $\left(5, \frac{1}{7}\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4. Sia $X := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$. Sull'insieme X, si definisca la seguente relazione:

$$x\boldsymbol{\rho}y \quad :\Leftrightarrow \quad (\ x = 3y - 3 \quad \vee \quad 3x - 3 = y \quad \vee \quad x = y\ ).$$

(1) Descrivere esplicitamente gli elementi del grafico R ($\subset X \times X$) della relazione $\boldsymbol{\rho}$.
(2) Mostrare quali tra le seguenti proprietà sono soddisfatte dalla relazione $\boldsymbol{\rho}$: **(R)** proprietà riflessiva; **(S)** proprietà simmetrica; **(AS)** proprietà antisimmetrica; **(T)** proprietà transitiva; **(TT)** proprietà totale.

ESERCIZIO 5.(1) Siano dati i seguenti numeri complessi

$$u =: 5 - 3i \quad \text{e} \quad v := 3 + 2i.$$

Determinare il numero complesso $z := x + iy$ in modo tale che $u = vz$.

(2) Scrivere il numero complesso $w := \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ in forma polare (o trigonometrica), cioè determinare il modulo $|w| \in \mathbb{R}$ e $\theta := \mathrm{Arg}(w)$, con $0 \leq \theta \lneq 2\pi$, in modo tale che $w = |w|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

ESERCIZIO 6. **(1)** Enunciare una proposizione equivalente alla negazione della seguente proposizione:
Se le aliquote fiscali verranno abbassate allora resteranno più soldi nelle tasche degli italiani.

(2) Date tre proposizioni elementari $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ descrivere la tabella di verità della proposizione " $(\boldsymbol{P} \vee (\neg\boldsymbol{Q})) \Rightarrow (\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{P})$ ".

ESERCIZIO 7. In virtù della legislazione recente, in un ridente paese di **1313** abitanti tutti hanno ricevuto un incentivo per acquistare un decoder per la TV digitale o/e non hanno pagato le tasse di successione. Sapendo che **1301** hanno ottenuto l'incentivo per il decoder e che i fortunati che hanno ottenuto l'incentivo per il decoder e non hanno pagato tasse di successione sono **101**, quanti sono coloro che non hanno pagato tasse di successione ?

ESERCIZIO 8. Dati $a := 483$, $b := 156$, utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive

(1) determinare $d := \mathrm{MCD}(a, b)$ $(\in \mathbb{N})$ e da questo dedurre il $\mathrm{mcm}(a, b)$ $(\in \mathbb{N})$;

(2) determinare un'espressione del tipo $d = ax + by$ (cioè determinare $x, y \in \mathbb{Z}$) [identità di Bézout].

ESERCIZIO 9. Sia $\{u_n \mid n \geq 1\}$ la successione dei numeri di Fibonacci definita da:

$$u_0 := 1\,, \quad u_1 := 1\,, \quad u_n := u_{n-1} + u_{n-2}\,, \quad \text{per } n \geq 2\,.$$

Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che vale una soltanto tra le seguenti identità:

(i) $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = 2n$;

(ii) $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = 1$;

(iii) $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = u_n - u_{n-1}$;

(iv) $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = 3n - (n + 1)$.

SOLUZIONI DELLA PRESENTE VERSIONE DELLA PROVA SCRITTA

Soluzione Esercizio 1
(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C)\,. \end{aligned}$$

(i), **(iii)** non valgono.
Ad esempio per $A := \{a\}$, $B := \{b\}$, $C := \{c\}$, allora
$A \cup (B \cap C) = A \neq \emptyset = (A \cup B) \cap C$;
$A \cup (B \cap C) = A \neq \emptyset = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Soluzione Esercizio 2.
(1) $a := (123)_5 = 38\,, \quad b := (1432)_5 = 242\,.$
(2) $a + b = 280 = (2110)_5 = (100011000)_2$.

Soluzione Esercizio 3. (1)
(R) $(x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$ infatti $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \;\; \wedge \;\; y - y = 0 \in \mathbb{Q}\,.$
(S)

$$\begin{aligned} (x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x', y') &\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z} \;\; \wedge \;\; y - y' \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow x' - x \in \mathbb{Z} \;\; \wedge \;\; y' - y \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow (x', y')\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\,. \end{aligned}$$

(T)

$$\begin{aligned} &(x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x', y') \wedge (x', y')\boldsymbol{\varepsilon}(x'', y'') \Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow x - x', x' - x'' \in \mathbb{Z} \;\; \wedge \;\; y - y', y' - y'' \in \mathbb{Q} \\ &\quad\Rightarrow x - x'' \; (= x - x' + x' - x'') \in \mathbb{Z} \;\; \wedge \; y - y'' \; (= y - y' + y' - y'') \in \mathbb{Q} \\ &\quad\Leftrightarrow (x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x'', y'')\,. \end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 4. (1) $R = \{(1, 0), (2, 3), (3, 6), (4, 9), (0, 1), (3, 2), (6, 3), (9, 4), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10)\}\,.$
(2) $\boldsymbol{\rho}$ soddisfa:
(R) proprietà riflessiva, perché in R ci sono tutte le coppie (x, x), con $0 \leq x \leq 10$;
(S) proprietà simmetrica, perché in R assieme ad una coppia del tipo (x, y) c'è anche la coppia (y, x).

(AS) la proprietà antisimmetrica non vale: ad esempio $1\boldsymbol{\rho}0$ e $0\boldsymbol{\rho}1$, ma ovviamente $1 \neq 0$;
(T) la proprietà transitiva non vale: ad esempio $2\boldsymbol{\rho}3$ e $3\boldsymbol{\rho}6$, ma $2\not\boldsymbol{\rho}6$;
(TT) la proprietà totale non vale: ad esempio $1\not\boldsymbol{\rho}2$ e $2\not\boldsymbol{\rho}1$.

Soluzione Esercizio 5. (1) $z := x + iy = uv^{-1} = \frac{u\overline{v}}{\mathrm{N}(v)} = \frac{9}{13} - i\frac{19}{13}$.
(2) $w := \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = |w|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$.

Soluzione Esercizio 6. (1) *Le aliquote fiscali verranno abbassate e non resteranno più soldi nelle tasche degli italiani.*
Infatti $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ è logicamente equivalente a $\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ e quindi $\neg(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q})$ è logicamente equivalente a $\neg(\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q}$.

(2)

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\neg\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P}\vee\neg\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}\wedge\boldsymbol{P}$	$(\boldsymbol{P}\vee(\neg\boldsymbol{Q}))\Rightarrow(\boldsymbol{R}\wedge\boldsymbol{P})$
v	v	v	f	v	v	v
v	v	f	f	v	f	f
v	f	f	v	v	f	f
v	f	v	v	v	v	v
f	v	v	f	f	f	v
f	v	f	f	f	f	v
f	f	v	v	v	f	f
f	f	f	v	v	f	f

Soluzione Esercizio 7. Sia A l'insieme di coloro che hanno ricevuto un incentivo per l'acquisto di un decoder e sia B l'insieme di coloro che non hanno pagato tasse di successione. Allora, coloro che non hanno pagato tasse di successione sono:

$$\begin{array}{ccccc} 113 & (= 1313 & -1301 & +101) \\ \mathrm{Card}(B) & (= \mathrm{Card}(A\cup B) & -\,\mathrm{Card}(A) & +\,\mathrm{Card}(A\cap B))\,. \end{array}$$

Soluzione Esercizio 8. **(1)** $d = \mathrm{MCD}(a,b) = \mathrm{MCD}(483,156) = 3\,.$
(2) $d = ax + by = 483\cdot 21 + 156\cdot(-65)\,.$

Soluzione Esercizio 9. $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = 1$, per ogni $n \geq 1$. Infatti,

Base dell'induzione: per $n = 1$, $\mathrm{MCD}(1,1) = 1$.
Sia $n \geq 2$, notiamo che

$$d \mid u_n \wedge d \mid u_{n-1} \Leftrightarrow d \mid (u_{n-1} + u_{n-2}) \wedge d \mid u_{n-1} \Leftrightarrow d \mid u_{n-2} \wedge d \mid u_{n-1}\,.$$

[Perché se un intero d divide due numeri interi, allora d divide ogni loro combinazione lineare a coefficienti interi, in particolare:

$$d \mid (a+b) \wedge d \mid a \quad\Leftrightarrow\quad d \mid b\ (= 1\cdot(a+b) + (-1)\cdot a) \wedge d \mid a\,.]$$

Pertanto, i divisori comuni di u_n e u_{n-1} coincidono con i divisori comuni di u_{n-1} e u_{n-2} e quindi $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = \mathrm{MCD}(u_{n-1}, u_{n-2})$.
Pertanto, se per ipotesi induttiva $\mathrm{MCD}(u_{n-1}, u_{n-2}) = 1$, allora, da quanto precede, $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n-1}) = 1$.

La **(i)** non è vera già per $n = 1$: $\mathrm{MCD}(1,\,1) = 1 \neq 2$.
La **(iii)** non è vera già per $n = 1$: $\mathrm{MCD}(1,\,1) = 1 \neq 0 = 1 - 1$.
La **(iv)** non è vera già per $n = 2$: $\mathrm{MCD}(2,\,1) = 1 \neq 3 = 3\cdot 2 - (2+1)$.