AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2004/2005

Appello A - I Parte

esercizio	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2
punti max	6	3	3	3	6	5	2	3	3	3
punti assegnati										
totale										

ESERCIZIO I-1. **(1)** Siano a, b due interi fissati. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad x \mapsto a + bx\,,$$

e si ponga per induzione $f^n := f \circ f^{n-1}$, per ogni $n \geq 2$ (dove, ovviamente, $f^1 := f$).
Provare per induzione su $n \geq 1$ che vale una delle seguenti formule:

(a) $f^n(x) = a(b^n + 1) - ab + b^n x\,;$
(b) $f^n(x) = a(b^n - 1) + b^n x\,;$
(c) $f^n(x) = a + ab + ab^2 + b^n x\,;$
(d) $f^n(x) = a\frac{(b^n-1)}{(b-1)} + b^n x\,.$

(2) Stabilire eventuali condizioni sugli interi a e b in modo tale che l'applicazione $f^n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, sia biiettiva, per ogni $n \geq 1$.

ESERCIZIO I-2.

(1) Nell'insieme $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, si consideri la relazione $\boldsymbol{\rho}$ definita nella maniera seguente:

$$(a + ib)\ \boldsymbol{\rho}\ (c + id) \quad :\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Stabilire quali tra le seguenti proprietà:

(R) proprietà riflessiva;
(S) proprietà simmetrica;
(AS) proprietà antisimmetrica;
(T) proprietà transitiva;
(TT) proprietà totale;

sono soddisfatte dalla relazione $\boldsymbol{\rho}$.

(2) Descrivere esplicitamente l'insieme $\{c + id \in \mathbb{Z}[i] \mid (1 + i)\ \boldsymbol{\rho}\ (c + id)\}$.

ESERCIZIO I-3. Nella città di Vattelapesca, tutti i **1003** abitanti compiono regolarmente almeno una delle seguenti azioni:

(a) giocano a carte; **(b)** guardano le partite di calcio in TV; **(c)** discutono di politica.

Sapendo che tra i **995** guardano le partite di calcio in TV, ve ne sono **22** che discutono di politica; tra **788** abitanti che giocano a carte ve ne sono **787** che guardano le partite di calcio in TV; tra i **140** abitanti che discutono di politica ve ne sono **121** che giocano a carte; quanti sono gli abitanti di Vattelapesca che giocano a carte, guardano le partite di calcio in TV e discutono di politica ?

ESERCIZIO I-4. **(1)** Siano $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ tre proposizioni.
Scrivere la tabella di verità delle proposizioni:

(a) $(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{R}$;
(b) $\boldsymbol{P} \Rightarrow (\boldsymbol{Q} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{R})$.

(2) Stabilire se le proposizioni in **(a)** ed in **(b)** sono oppure non sono logicamente equivalenti.

(3) Negare la seguente proposizione: *"Se il rapporto tra dollaro ed euro scende allora il prezzo della benzina diminuisce"*.

ESERCIZIO I-5. Siano dati i numeri complessi

$$u =: 1 + 4i \quad \text{e} \quad v := 3 + 2i.$$

(1) Determinare il numero complesso $z := x + iy$ in modo tale che $u = vz$.

(2) Determinare $a, b \in \mathbb{Q}$ in modo tale che $z^{-1} = a + ib$.

AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2004/2005

APPELLO A - II Parte

esercizio	1	2	3		4			5		6			
punti max	5	5	5	4	4	2	4	4	4	3	8	3	3
punti assegnati													
totale													

ESERCIZIO II-1. Determinare (mod 715) tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 12 \pmod{22} \\ 9X \equiv 0 \pmod{15} \\ 8X \equiv 10 \pmod{13}\ . \end{cases}$$

ESERCIZIO II-2. Sia dato un intero

$$a := a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

scritto in forma decimale (con $0 \leq a_i \leq 9$). Dimostrare che:

$$9 \mid a \quad \Leftrightarrow \quad 9 \mid (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)\,.$$

ESERCIZIO II-3. **(1)** Sia $f : (G_1, \ \cdot\ ) \to (G_2, \ \cdot\ )$ un omomorfismo di gruppi e sia H un sottogruppo di $(G_2, \ \cdot\ )$. Dimostrare che $f^{-1}(H) := \{x \in G_1 \mid f(x) \in H\}$ è un sottogruppo di $(G_1, \ \cdot\ )$.

(2) Sia $g : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ definita da $g(x + iy) = x$. Stabilire se g è un omomorfismo di gruppi .

Descrivere esplicitamente $g^{-1}(\mathbb{Q})$ e stabilire se $g^{-1}(\mathbb{Q})$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}, +)$.

ESERCIZIO II-4. Sia G l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{Q}\,,\ ac \neq 0\,.$$

(1) Mostrare che $(G, \cdot\ )$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo di matrici $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}) := \{A \in \boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{Q}) \mid \det(A) \neq 0\}$.

(2) Stabilire se $(G, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

(3) Sia H l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } b \in \mathbb{Q}\,.$$

Stabilire se H è un sottogruppo di $(G, \cdot)$.

ESERCIZIO II-5. Sia $A := \mathbb{Q} \times \mathbb{C}$ l'anello prodotto diretto dei campi $(\mathbb{Q}, +, \cdot\ )$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot\ )$.

(1) Stabilire se $(A, +, \cdot\ )$ è un campo.

(2) Sia $B := \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ e sia $f : B \hookrightarrow A$ l'applicazione iniettiva definita da $f((x, y)) := (x, iy)$. Stabilire se $f(B)$ è un sottoanello di $(A, +, \cdot\ )$.

ESERCIZIO II-6. **(1)** Enunciare il Criterio di Eisenstein di irriducibilità di polinomi a coefficienti interi.

(2) Dimostrare il Criterio di Eisenstein.

(3) Dimostrare che un polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ è irriducibile (in $\mathbb{Q}[X]$) se e soltanto se $f(X + 1) \in \mathbb{Q}[X]$ è irriducibile (in $\mathbb{Q}[X]$).

(4) Stabilire se il polinomio $(X + 1)^5 + 7$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.