

# Corso di Analisi Numerica - AN410

## Parte 5: formule di quadratura

*Roberto Ferretti*



- Formule di quadratura interpolatorie: teoria generale
- Formule di Newton–Cotes semplici
- Formule di Newton–Cotes composite
- Formule Gaussianhe

## Formule di quadratura interpolatorie: teoria generale

Le *formule di quadratura* (o di *integrazione numerica*) sono algoritmi di approssimazione dell'integrale ottenuti dalla integrazione di una approssimazione della funzione integranda.

- Se la approssimazione è scritta in forma di **combinazione lineare**,

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + E_n(x)$$

allora l'integrale si scrive

$$\int_a^b f(x)dx = c_0 \int_a^b \phi_0(x)dx + \cdots + c_n \int_a^b \phi_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx.$$

- L'espressione

$$I_n(f, a, b) = c_0 \int_a^b \phi_0(x) dx + \cdots + c_n \int_a^b \phi_n(x) dx$$

rappresenta l'approssimazione dell'integrale e viene indicata con il nome di **formula di quadratura**

- Se la approssimazione di  $f$  è nella forma di **polinomio di Lagrange**, si ha  $c_i = f(x_i)$  e  $\phi_i(x) = L_i(x)$ , e la formula di quadratura si scrive nella forma **interpolatoria**

$$I_n(f, a, b) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

con **nodi**  $x_i$  e **pesi**  $\alpha_i = \int_a^b L_i(x) dx$

I pesi  $\alpha_i$  vengono calcolati di regola su un *intervallo di riferimento*  $[\bar{a}, \bar{b}]$ . Se in corrispondenza di  $x \in [a, b]$  si ha  $t \in [\bar{a}, \bar{b}]$ , la trasformazione che lega  $x$  a  $t$  è

$$x(t) = a + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(t-\bar{a})$$

e di conseguenza  $x_i = x(t_i)$ , e

$$\alpha_i = \int_a^b L_i(x) dx = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} L_i(x(t)) dt = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} w_i$$

in cui il valore  $w_i$  è il *peso associato al nodo*  $t_i$  nell'*intervallo di riferimento*. Tipici esempi sono un intervallo con distanza unitaria tra i nodi nel caso di formule a nodi equidistanti e l'intervallo  $[-1, 1]$  per le formule gaussiane.

L'errore di quadratura viene stimato in genere in modo molto tecnico. Una maggiorazione banale se ne può dare a partire dall'errore di approssimazione  $E_n(x)$ :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_n(f, a, b) \right| = \left| \int_a^b E_n(x) dx \right| \leq (b - a) \|E_n\|_\infty$$

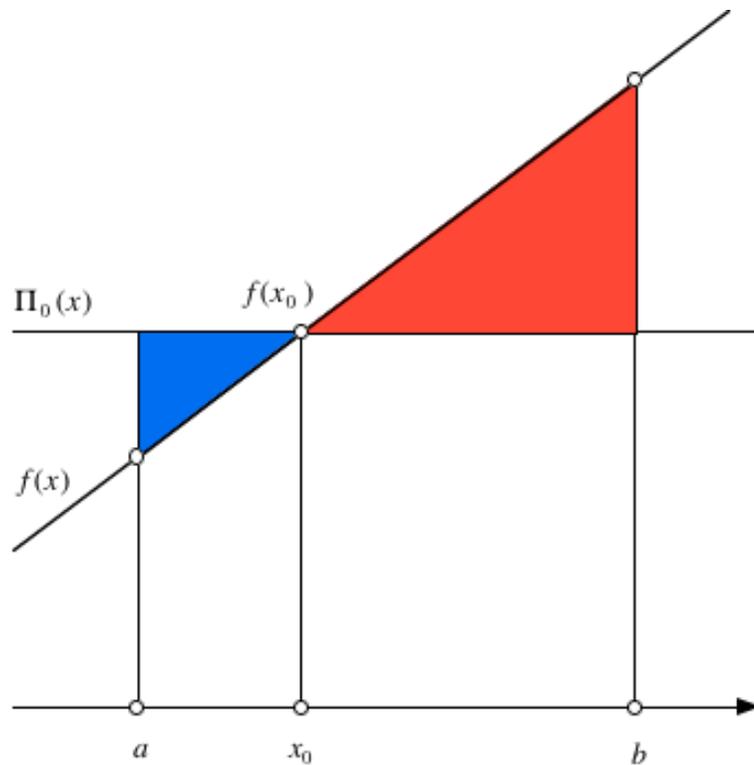
- Questo modo di stimare l'errore non tiene però conto del fatto che l'errore di approssimazione  $E_n$  può avere integrale “piccolo” senza essere “piccolo” esso stesso, tipicamente a causa di cancellazioni tra contributi positivi e contributi negativi

Un altro modo (indiretto) di caratterizzare l'accuratezza di una formula di quadratura è tramite il suo *grado di precisione*, il massimo intero  $m$  tale che tutti i polinomi grado non superiore ad  $m$  siano integrati esattamente:

$$m = \max \left\{ k : \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) = \int_a^b f(x) dx, \quad \forall f \in \mathbb{P}_k \right\}$$

- Se  $n$  è il grado del polinomio interpolatore,  $E_k \equiv 0$  per  $k = 0, \dots, n$ , e di conseguenza  $m \geq n$ .
- E' però possibile che  $\int_a^b E_k = 0$  anche se l'errore di interpolazione non è identicamente nullo, e di qui la possibilità di avere  $m > n$ .

Esempio:  $n = 0$



La formula di quadratura è

$$I_0(f, a, b) = (b - a)f(x_0)$$

cioè l'area del rettangolo di base  $[a, b]$  e di altezza  $f(x_0)$ .

- Le costanti sono sempre integrate esattamente ( $E_0 \equiv 0$ )
- I polinomi di grado 1 sono integrati esattamente a condizione che  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  ( $E_0 \neq 0$ ,  $\int_a^b E_0 = 0$ )

La **condizione necessaria e sufficiente** (teorema di Polya) perché una formula di quadratura nella forma

$$I_n(f, a, b) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad (x_i \in [a, b])$$

converga a  $\int_a^b f(x)dx$  per ogni  $f \in C^0([a, b])$  quando  $n \rightarrow \infty$ , è che

*i)* per ogni polinomio fissato  $p \in \mathbb{P}_k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(p, a, b) = \int_a^b p(x)dx$

*ii)* esista una costante  $M > 0$  tale che, per ogni  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n |\alpha_i| < M$

Se la formula di quadratura è ottenuta dalla **integrazione di un polinomio interpolatore** di grado  $n$ :

- la prima ipotesi è sempre soddisfatta (infatti  $E_n \equiv 0$  per  $n \geq k$ )
- poiché le costanti sono sempre interpolate (e quindi integrate) esattamente, si verifica facilmente che  $\sum_i \alpha_i = b - a$
- non è invece necessariamente vero che  $\sum_i |\alpha_i|$  resti limitata: in particolare, se i nodi sono equidistanti questa sommatoria diverge per  $n \rightarrow \infty$

La quantità  $\sum_i |\alpha_i|$  è anche legata alla propagazione delle perturbazioni. Supponendo infatti che i valori  $f(x_i)$  siano affetti da perturbazioni  $\delta_i$ , tali che  $|\delta_i| \leq \delta$ , si ha

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i [f(x_i) + \delta_i] = I_n(f, a, b) + \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_i$$

dove il modulo dell'ultimo termine si maggiora come

$$\left| \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_i \right| \leq \delta \sum_{i=0}^n |\alpha_i| \leq \delta M$$

- Se i pesi sono tutti positivi,  $M = b - a$ , altrimenti le perturbazioni si propagano in misura più forte (situazione che si evita quanto possibile)

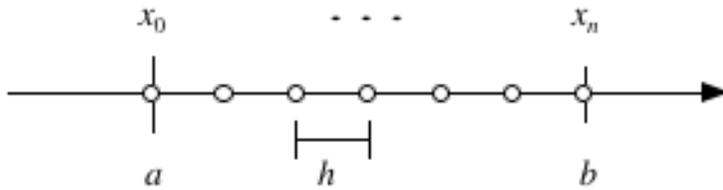
## Formule di Newton–Cotes semplici

Queste formule di quadratura sono basate sulla integrazione di un unico polinomio interpolatore di grado  $n$  costruito su **nodi equidistanti**.

Si dividono in due sottoclassi:

- Le **formule di Newton–Cotes chiuse** in cui i due nodi estremi  $x_0$  e  $x_n$  coincidono con gli estremi dell'intervallo di integrazione
- Le **formule di Newton–Cotes aperte** in cui tutti i nodi sono interni all'intervallo di integrazione

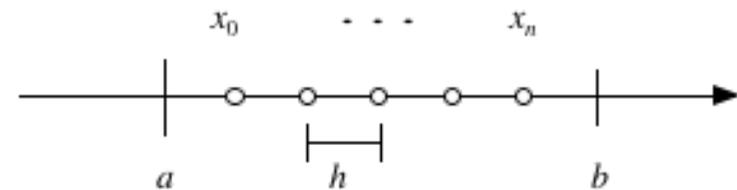
## Formule chiuse



$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \vdots \\ x_k = a + kh \\ \vdots \\ x_n = b \end{cases}$$

## Formule aperte



$$h = \frac{b - a}{n + 2}$$

$$\begin{cases} x_0 = a + h \\ \vdots \\ x_k = a + (k + 1)h \\ \vdots \\ x_n = b - h \end{cases}$$

Costruzione delle formule di N–C: si può partire ad esempio da un intervallo di riferimento in cui  $t_k = k$ , ed in conseguenza nell'intervallo di integrazione effettivo si avrà  $\alpha_k = hw_k$ .

- Per il grado  $n = 0$  la formula può essere solo aperta. L'intervallo di riferimento è  $[-1, 1]$ , l'unico nodo è  $t_0 = 0$ , e  $L_0(t) \equiv 1$ . Si ha

$$w_0 = \int_{-1}^1 L_0(t) dt = 2$$

- Questa formula va sotto il nome di **formula del punto medio**, ed il suo grado di precisione (come abbiamo già detto) è  $m = 1$  anche se l'interpolazione è di grado  $n = 0$

La situazione in cui  $m = n+1$  è del tutto generale nelle formule di N-C di grado pari e più in generale in tutte le formule con nodi simmetrici rispetto al centro dell'intervallo ed in numero dispari. Infatti, se  $f \in \mathbb{P}_{n+1}$ , l'errore di interpolazione vale

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{c_{n+1}}{(n+1)!} \omega_n(x)$$

(in cui  $c_{n+1}$  è il valore costante della derivata  $f^{(n+1)}$ ). Si ottiene quindi

$$\int_a^b E_n(x) dx = \frac{c_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x) dx = 0$$

poiché  $\omega_n$  è una funzione dispari rispetto al centro dell'intervallo ed ha quindi integrale nullo.

Per il grado  $n = 1$  la formula può essere sia chiusa che aperta.

- Per la **formula chiusa** (detta **formula del trapezio**) l'intervallo di riferimento è  $[0, 1]$ , i due nodi sono  $t_0 = 0$  e  $t_1 = 1$ , la base di Lagrange è costituita dalle funzioni  $L_0(t) = 1 - t$  e  $L_1(t) = t$ . Si ottengono così i pesi

$$w_0 = \int_0^1 L_0(t) dt = \frac{1}{2}, \quad w_1 = \int_0^1 L_1(t) dt = \frac{1}{2} = 1 - w_0$$

- Per la **formula aperta** i nodi e le funzioni di base sono gli stessi, ma l'intervallo di riferimento è  $[-1, 2]$ . Si ottengono i pesi

$$w_0 = \int_{-1}^2 L_0(t) dt = \frac{3}{2}, \quad w_1 = \int_{-1}^2 L_1(t) dt = \frac{3}{2} = 3 - w_0$$

Formule di N–C chiuse							
$n$	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$
1	1/2	1/2					
2	1/3	4/3	1/3				
3	3/8	9/8	9/8	3/8			
4	28/90	128/90	48/90	128/90	28/90		
5	95/288	375/288	250/288	250/288	375/288	95/288	
6	41/140	216/140	27/140	272/140	27/140	216/140	41/140

Formule di N–C aperte				
$n$	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
0	2			
1	$3/2$	$3/2$		
2	$8/3$	$-4/3$	$8/3$	
3	$55/24$	$5/24$	$5/24$	$55/24$

- La **somma dei pesi** uguaglia come sempre l'ampiezza dell'intervallo (questo permette di evitare il calcolo di uno degli integrali)
- Per la **simmetria dei nodi**, anche i pesi sono simmetrici e più precisamente  $w_k = w_{n-k}$  (questo permette di restringere il calcolo a metà dei pesi)
- **Pesi negativi** cominciano a comparire dal grado  $n = 7$  per le formule **chiuse** e dal grado  $n = 2$  per le formule **aperte**
- In tutte le formule di Newton–Cotes si ha  $\lim_n \sum_k |w_k| = \infty$

L'errore di quadratura nelle formule di Newton–Cotes vale

$$\int_a^b f(x)dx - I_n(f, a, b) = \begin{cases} \frac{A_n h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{B_n h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

dove  $\xi \in (a, b)$  e le costanti  $A_n, B_n$  sono date da

$$A_n = \begin{cases} \int_0^n s(s-1)\cdots(s-n)ds < 0 & \text{per formule chiuse} \\ \int_{-1}^{n+1} s(s-1)\cdots(s-n)ds > 0 & \text{per formule aperte} \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} \int_0^n s^2(s-1)\cdots(s-n)ds < 0 & \text{per formule chiuse} \\ \int_{-1}^{n+1} s^2(s-1)\cdots(s-n)ds > 0 & \text{per formule aperte} \end{cases}$$

- Queste formule di rappresentazione dell'errore di quadratura hanno una **dimostrazione molto tecnica**
- La **mancata limitatezza di  $\sum_k |\alpha_k|$**  indica che non si ha convergenza per  $n \rightarrow \infty$  (cioè le formule di N–C semplici vanno viste come **componenti elementari di formule di integrazione composite**)
- Quando  $h$  venga visto come parametro di discretizzazione, le formule di ordine più alto presentano un **maggiore ordine di convergenza**, a patto che la funzione  $f$  sia sufficientemente regolare

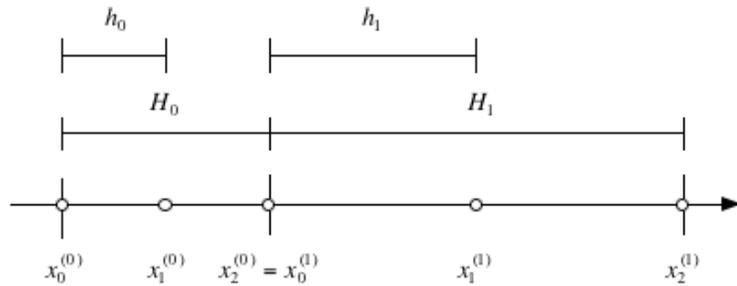
## Formule di Newton–Cotes composite

Il fatto che le formule di N–C semplici non convergono per  $n \rightarrow \infty$  porta (analogamente al caso dell'interpolazione a nodi equidistanti) a considerare la loro implementazione in forma composita:

$$I_{n,m}(f, a, b) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(j)} f(x_k^{(j)})$$

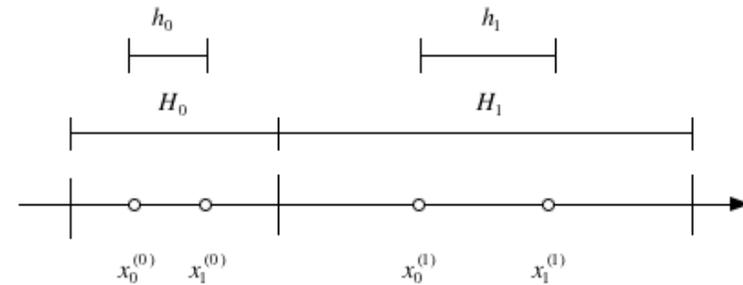
- L'indice  $j$  si riferisce al sottointervallo,  $k$  al nodo al suo interno, ed inoltre  $H_j = b_j - a_j$  (con  $\sum_j H_j = b - a$ ), e  $H = \max_j H_j$ .
- La situazione considerata è quella di una unica formula di quadratura impiegata su intervalli di ampiezza variabile  $H_j$

## Formule chiuse



Formula di Simpson (chiusa,  $n = 2$ ) su due sottointervalli

## Formule aperte



Formula aperta di grado  $n = 1$  su due sottointervalli

- Si parte da una unica formula di quadratura con pesi  $w_k$
- Il passo tra i nodi dell'intervallo  $j$ -simo vale

$$h_j = \frac{H_j}{l}, \quad l = \begin{cases} n & \text{per quadrature chiuse} \\ n + 2 & \text{per quadrature aperte} \end{cases}$$

- I pesi relativi all'intervallo  $j$ -simo sono

$$\alpha_k^{(j)} = h_j w_k$$

- La condizione di integrazione esatta delle costanti ha la forma

$$\sum_k \alpha_k^{(j)} = H_j$$

- Si possono accorpare i pesi relativi allo steso nodo

Una situazione tipica è quella di **nodi equidistanti**. In questo caso i sottointervalli hanno ampiezza costante  $H_j \equiv H$  ed i nodi si numerano usualmente **in modo consecutivo (con un solo indice)**. Ad esempio:

- Nel caso della **formula dei trapezi composta** si ha  $h = H$ ,  $\alpha_k^{(j)} = hw_k$  e si sommano i due pesi relativi ad ogni nodo interno, ottenendo

$$I_{1,m}(f, a, b) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m))$$

- Per la **formula di Simpson composta**, allo stesso modo si ottiene

$$I_{2,m}(f, a, b) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2m-1}) + 4f(x_{2m}) + f(x_{2m+1}))$$

- Le quadrature di Newton–Cotes composite **convergono sotto la sola ipotesi di Riemann–integrabilità** per  $H \rightarrow 0$  (la dimostrazione si basa sul fatto che queste quadrature si possono reinterpretare come **combinazioni lineari a somma unitaria di somme integrali di Riemann**)
- Se la **formula semplice** presenta un errore della forma:

$$\int_{a_j}^{b_j} f(x) dx - I_n(f, a_j, b_j) = C_n h_j^{p+1} f^{(p)}(\xi)$$

allora per la **formula composta** si ha la maggiorazione di errore

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{n,m}(f, a, b) \right| = D_n H^p \|f^{(p)}\|_\infty$$

[indice](#)

## Formule Gaussiane

Si tratta di formule di quadratura interpolatorie a nodi non equidistanti costruite in modo da massimizzare il grado di precisione.

- Un esempio semplice di questa idea è dato dalla formula del punto medio in cui il grado di precisione passa da  $m = 0$  ad  $m = 1$  collocando opportunamente il nodo  $x_0$
- Per questa strada si costruiscono formule a pesi positivi, convergenti per  $n \rightarrow \infty$  e con grado di precisione  $m = 2n + 1$
- L'intervallo di riferimento normalmente è  $[-1, 1]$

Esempio: formula a due nodi simmetrici  $\pm a$  in  $[-1, 1]$

- Le costanti sono integrate esattamente se  $\alpha_0 + \alpha_1 = 2$
- I termini di primo grado sono integrati esattamente se  $\alpha_0 = \alpha_1$

- I termini di secondo grado sono integrati esattamente se

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = I_1(x^2, -1, 1) \equiv \alpha_0 \cdot (-a)^2 + \alpha_1 \cdot a^2 = 2a^2,$$

il che porta alla scelta  $a = 1/\sqrt{3}$

- I termini di terzo grado sono già integrati esattamente per simmetria

**Premessa:** indichiamo con il nome di *polinomi di Legendre* in  $[-1, 1]$  la famiglia di polinomi  $\{P_k\}$  tali che  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $\deg P_k = k$ , e che

$$\int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)dx = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

- Questa famiglia si può costruire per **ortogonalizzazione della base naturale**  $\{1, x, x^2, \dots\}$ , oppure mediante la formula ricorrente

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xP_k(x) - \frac{k}{k+1}P_{k-1}(x)$$

che permette di calcolarli per  $k \geq 1$  dati  $P_0$  e  $P_1$ .

- L'insieme  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  è **una base dello spazio**  $\mathbb{P}_k$

Nelle formule di Gauss–Legendre:

- gli  $n + 1$  nodi di quadratura vengono posti in corrispondenza delle radici del polinomio di Legendre  $P_{n+1}$  (ovvero il polinomio di errore  $\omega_n$  coincide a meno di costanti moltiplicative con  $P_{n+1}$ ). Nella pratica i nodi devono essere a loro volta calcolati in modo approssimato
- I pesi di quadratura sono definiti nella maniera usuale  $\alpha_i = \int L_i(x) dx$  (questo integrale può essere valutato esattamente mediante una quadratura che abbia il grado di precisione richiesto, ad esempio una formula gaussiana di grado appena più basso)

$n$	$t_i$	$w_i$
0	0.0	2.0
1	$\pm 0.57735027$	1.0
2	$\pm 0.77459667$ 0.0	0.55555556 0.88888889
3	$\pm 0.86113631$ $\pm 0.33998104$	0.34785485 0.65214515
4	$\pm 0.90617985$ $\pm 0.53846931$ 0.0	0.23692689 0.47862867 0.56888889

Riguardo alla convergenza delle formule di Gauss–Legendre:

- Le formule gaussiane convergono per ogni  $f \in C^0([-1, 1])$ . La convergenza deriva dalla applicazione del teorema di Polya, poiché la formula è costruita integrando il polinomio di Lagrange, ed inoltre

*i)* i nodi sono tutti interni a  $[-1, 1]$ ;

*ii)* i pesi sono tutti positivi, quindi  $\sum_k |\alpha_k| = 2$

- Il grado di precisione di una formula gaussiana a  $n + 1$  nodi è  $m = 2n + 1$  (questo implica anche una stima molto favorevole dell'errore)

Confronto 1: calcolo con una quadratura a cinque nodi dell'integrale

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

- La formula di N–C semplice di grado 4 dà

$$I_4(\sin x, 0, \pi) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{128}{90} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{48}{90} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{128}{90} \sin \frac{3\pi}{4} \right) \approx 1.998571$$

- In questo caso la accuratezza della quadratura non è sorprendente, visto che la funzione integranda è analitica, e quindi anche la strategia a nodi equidistanti porta ad un polinomio interpolatore convergente

- La formula di N–C composta di grado 1 dà

$$I_{1,4}(\sin x, 0, \pi) = \frac{\pi}{4} \left( \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \approx 1.896119$$

- La formula di N–C composta di grado 2 dà

$$I_{2,2}(\sin x, 0, \pi) = \frac{\pi}{12} \left( 4 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{3\pi}{4} \right) \approx 2.004560$$

- La formula di grado 2 ha ovviamente una **accuratezza migliore**, anche perché l'approssimazione di grado 1 presenta un errore sistematico con una funzione concava

- La formula di gauss–Legendre a cinque nodi necessita di riportare preliminarmente nodi e pesi all'intervallo  $[0, \pi]$ , ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_0 = 0.147374, & \alpha_0 = 0.372164 \\ x_1 = 0.724971, & \alpha_1 = 0.751829 \\ x_2 = 1.570796, & \alpha_2 = 0.893609 \\ x_3 = 2.416621, & \alpha_3 = 0.751829 \\ x_4 = 2.994219, & \alpha_4 = 0.372164 \end{array} \right.$$

ed il valore risultante della quadratura è (sempre con sei decimali)  $I_4(\sin x, 0, \pi) \approx 2.000003$ . La grande accuratezza dipende sia dall'elevato grado di precisione che dalla regolarità della funzione integranda.

Confronto 2: calcolo con una quadratura a cinque nodi dell'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$$

- La formula di N–C semplice di grado 4 dà

$$I_4(\sqrt{x}, 0, 1) = \frac{1}{4} \left( \frac{128}{90} \cdot \frac{1}{2} + \frac{48}{90} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{128}{90} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{28}{90} \right) \approx 0.657757$$

- In questo caso la accuratezza della quadratura è molto ridotta dalla scarsa regolarità della funzione integranda

- La formula di N–C composta di grado 1 dà

$$I_{1,4}(\sqrt{x}, 0, 1) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \approx 0.643283$$

- La formula di N–C composta di grado 2 dà

$$I_{2,2}(\sqrt{x}, 0, \pi) = \frac{1}{12} \left( 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \approx 0.656526$$

- Le due formule hanno entrambe **accuratezza comparabile con la formula semplice**. L'approssimazione di grado 1 presenta ancora un errore sistematico dovuto alla concavità della funzione integranda

- Nodi e pesi della **formula di gauss–Legendre a cinque nodi**, riportati all'intervallo  $[0, 1]$ , sono

$$\begin{cases} x_0 = 0.04691, & \alpha_0 = 0.118464 \\ x_1 = 0.230765, & \alpha_1 = 0.239315 \\ x_2 = 0.5, & \alpha_2 = 0.284445 \\ x_3 = 0.769235, & \alpha_3 = 0.239315 \\ x_4 = 0.95309, & \alpha_4 = 0.118464 \end{cases}$$

ed il risultato, sempre con sei decimali, è  $I_4(\sqrt{x}, 0, 1) \approx 0.667299$ .  
La formula gaussiana presenta quindi ancora **la migliore accuratezza**,  
anche se ridotta dalla **bassa regolarità** della funzione