N.1

Tre particelle cariche sono poste come in figura ad una distanza d. Le cariche Q_1 e $Q_2 = 10^{-9}\ C$ sono tenute ferme mentre la carica Q_3, libera di muoversi, è in equilibrio. Calcolare il valore di Q_1
Affinchè Q_3 sia in equilibrio, si deve avere:

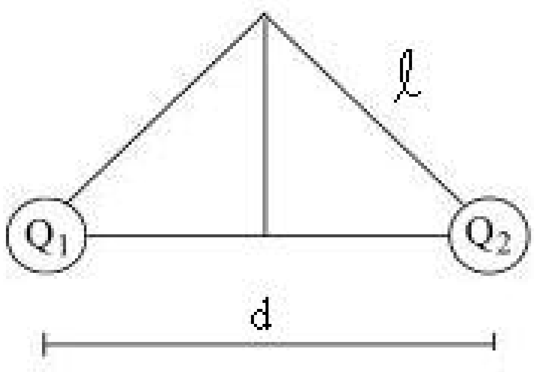
$$x(t) = x_0 \cdot cos(\omega t); \qquad y(t) = v_0/\omega \cdot sen(\omega t); \tag{1}$$

$$\frac{Q_1 \cdot Q_3}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 (2 \cdot d)^2} = -\frac{Q_2 \cdot Q_3}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 (d)^2} \tag{2}$$

$$\frac{Q_1}{4 \cdot d^2} = -\frac{Q_2}{d^2} \Rightarrow Q_1 = -4 \cdot 10^{-9} C \tag{3}$$

N.2

Due sfere di masse $m = 100\ g$ e carica $Q_1 = 0.3\ \mu C$, $Q_2 = 0.5\ \mu C$ sono sospese a due fili di lunghezza $l = 1\ m$, conessi ad un punto comune *O*. Sapendo che il sistema è in equilibrio, calcolare l'angolo θ che ciascun filo forma con la verticale. (Per piccoli angoli $sen\theta = tg\theta = \theta$)
Ognuna delle due sfere è soggetta alla forza peso e ad una forza repulsiva di natura



elettrica con l'altra sfera. Le forze sono dirette come in figura e sono bilanciate dalla reazione vincolare del filo, che può essere scomposta lungo le due direzioni x ed y.

$$\begin{cases} R \cdot sen\theta = -q\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d^2} \\ R \cdot cos\theta = m \cdot g \Rightarrow R = \frac{m \cdot g}{cos\theta} \end{cases}$$

Ricavando l'espressione di R dalla seconda equazione e sostituendola nella prima si ottiene:

$$m \cdot g \cdot tg\theta = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi\epsilon_0 \cdot d^2} \tag{4}$$

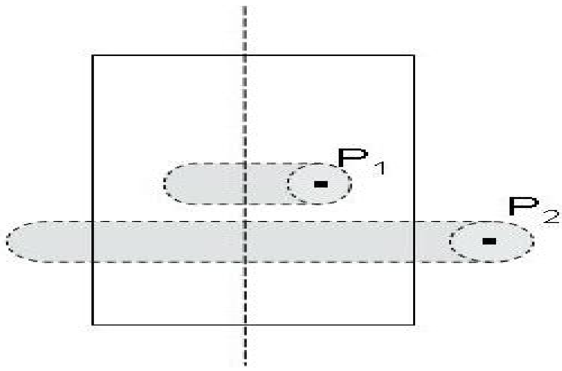
Ricordando che $tg\theta \cong \theta$ e che $d = 2 \cdot l \cdot \theta$:

$$\theta^3 = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot l^2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow \theta \cong 7 \cdot 10^{-2} rad \tag{5}$$

N.3

Uno strato indefinito di spessore $d = 10\ cm$ è uniformemente carico con una densità $\rho = 10^{-10}\ C/m^3$.Calcolare il campo elettrico nei punti P_1 distante $x_1 = 5\ cm$ dal piano mediano dello strato e nel punto P_2 distante $x_1 = 20\ cm$.

Applichiamo il teorema di Gauss considerando il flusso attraverso un cilindro per-



pendicolare all'asse dello strato, con superficie di base S centrato sul punto P_1:

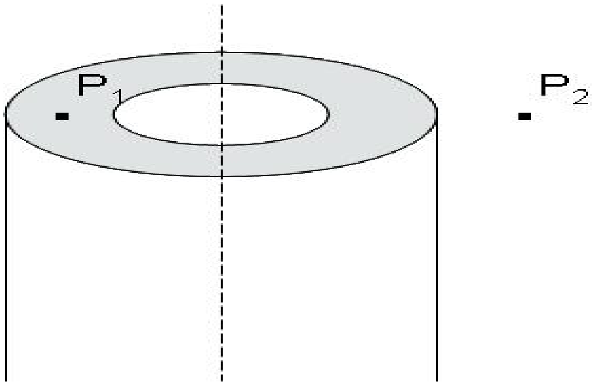
$$E(P_1) \cdot 2 \cdot S = \frac{2 \cdot S \cdot x_1 \cdot \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E(P_1) = 0.56 V/m \tag{6}$$

Analogamente per il punto P_2, ma questa volta bisogna tener conto che il volume carico dipende dallo spessore dello strato, non dall'altezza del cilindro.

$$E(P_2) \cdot 2 \cdot S = \frac{S \cdot l \cdot \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E(P_2) = 1.13 V/m \tag{7}$$

N.4

All'interno di un guscio cilindrico indefinito di raggi $R_1 = 5\ cm$ ed $R_2 = 10\ cm$ è distribuita una carica elettrica con densità costante $\rho = 5 \cdot 10^{-10}\ C/m^3$. Calcolare il campo elettrico in punti distanti dall'asse del cilindro $d_1 = 7\ cm$ e $d_2 = 15\ cm$.



Anche in questo caso il campo è calcolabile tramite teorema di Gauss, applicato alla simmetria cilindrica del sistema in questione. Considerando un cilindro con raggio R_1 con stesso asse del guscio cilindrico, è necessario considerare il flusso attraverso la superficie laterale dello stesso. La carica da considerare è invece quella compresa tra la superficie interna del guscio e la superficie del ipotetico cilindro su cui si stà applicando il teorema.

$$\oint_S \vec{E}\times\vec{n}dS = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E(P_1)\cdot 2\cdot\pi\cdot d_1\cdot l = \int_{R_1}^{d_1} \rho\cdot 2\cdot\pi\cdot x\cdot l dx \Rightarrow E(P_1) = \frac{\rho(d_1^2 - R_1^2)}{2\cdot\epsilon_0\cdot d_1} = 0.77V/m \tag{8}$$

Analogamente per P_2:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E(P_2)\cdot 2\cdot\pi\cdot d_2\cdot l = \int_{R_1}^{R_2} \rho\cdot 2\cdot\pi\cdot x\cdot l dx \Rightarrow E(P_2) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\cdot\epsilon_0\cdot d_2} = 1.41V/m \tag{9}$$

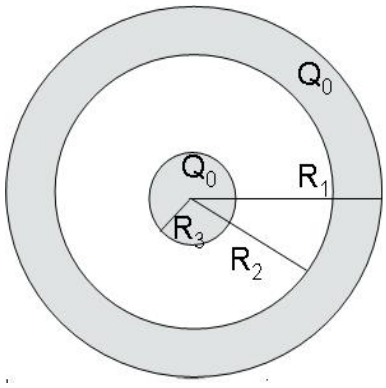
N.5

Una sfera metallica cava ha raggio esterno $R_1 = 10\ cm$, raggio interno $R_2 = 7\ cm$ ed al suo interno, in modo concentrico, è presente una sfera metallica piena di raggio $R_3 = 5\ cm$. Su entrambe le sfere è depositata una carica $Q_0 = 10^{-8}\ C$. Determinare il campo elettrico sui due corpi e calcolare il potenziale elettrostatico al centro della sfera interna.

Il calcolo del campo elettrico va scomposto nelle diverse regioni di spazio. Partendo dal centro della sfera, per $r < R_3$:

$$E(r) = 0 \tag{10}$$

Poichè in un conduttore il campo è sempre nullo. Per calcolare il campo in $R_3 <$



$r < R_2$ si applica il teorema di Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \times \vec{n} dS = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = Q_0/\epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{Q_0}{4 \cdot \pi \epsilon_0 \cdot r^2} \tag{11}$$

Di nuovo la regione $R_2 < r < R_1$ è interna ad un conduttore, quindi:

$$E(r) = 0 \tag{12}$$

Infine, per $r > R_1$, tramite teorema di Gauss:

$$E = \frac{2 \cdot Q_0}{4 \cdot \pi \epsilon_0 \cdot r^2} \tag{13}$$

Per il calcolo del potenziale partiamo dalla superficie esterna di raggio R_1:

$$V(R_1) = -\int_{\infty}^{R_1} \frac{2 \cdot Q_0}{4 \cdot \pi \cdot r^2} dr = \frac{2 \cdot Q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1} \tag{14}$$

Tra R_1 ed R_2 il campo è nullo, quindi il potenziale rimane costante.

$$V(R_2) = V(R_1) = \frac{2 \cdot Q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1} \tag{15}$$

Sulla superficie R_3:

$$V(R_3) - V(R_2) = -\int_{R_2}^{R_3} \frac{Q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} dr = \frac{Q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{16}$$

Il potenziale $V(R_3)$ è anche quello presente al centro delle sfera, pari a:

$$V(R_3) = \frac{Q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right\} = 2300V \tag{17}$$

N.6

Due cariche puntiformi q e $-4q$ sono poste ad una distanza $d = 9\ cm$. Determinare in quali punti può essere collocata una carica $q' = q$ in modo

che sia in equilibrio.

Affinchè la terza carica sia in equilibrio, la somma delle forze attrattive e repulsive deve essere pari a zero:

$$F_+ - F_- = 0 \Rightarrow \frac{q \cdot q'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x^2} - \frac{4 \cdot q \cdot q'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x^2} = 0 \tag{18}$$

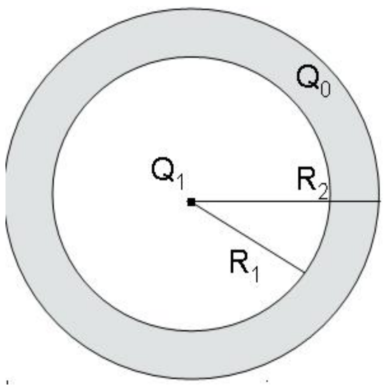
$$\frac{1}{x^2} - 4(d-x)^2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x^2 + 2 \cdot d \cdot x - d^2 = 0 \tag{19}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottengono i due punti di equilibrio per $x = -d$ e per $x = d/3$.

N.7

Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 10\ cm$ ed $R_2 = 20\ cm$ possiede inizialmente una carica $Q_o = 3 \cdot 10^{-8}\ C$. Successivamente al suo centro viene posta una carica $Q_1 = -1 \cdot 10^{-8}\ C$. Calcolare:

1. **il campo $\vec{E}$ (direzione, verso e modulo) in tutto lo spazio.**
2. **il potenziale esterno della sfera.**
3. **le densità di carica σ_1e σ_2 sulle superfici interna ed esterna della sfera.**



1. Una volta raggiunta la condizione stazionaria, ricordando che all'interno di un conduttore il campo elettrico è nullo, si avrà:

$$0 < r < R_1 \qquad \vec{E}(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = -90/r^2 V/m \tag{20}$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad \vec{E}(r) = 0 \tag{21}$$

$$r > R_2 \qquad \vec{E}(r) = \frac{Q_0 - Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = 180/r^2 V/m \tag{22}$$

2. Il potenziale sulla superficie esterna viene calcolato integrando l'espressione del campo per $r \geq R_2$ proprio per $r = R_2$

$$V(r) = \frac{Q_0 - Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_2} = 900V \tag{23}$$

3. Sulla superficie interna della sfera si sarà accumulata una carica uguale e contraria a quella presente nel centro della cavità.

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi R_1^2} = 8 \cdot 10^{-8} C/m^2 \tag{24}$$

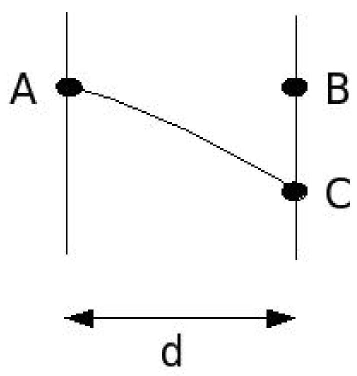
All'esterno della sfera si sarà accumulata la carica rimanente presente sulla buccia sferica.

$$\sigma_2 = \frac{Q_0 - Q_1}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} = 8 \cdot 10^{-8} C/m^2 \tag{25}$$

N.8

Una particella di massa $m = 0.1\ mg$ e carica $q = 10^{-10}\ C$ in un dato istante è poggiata in un punto A appartenente ad una lastra metallica di superficie $1\ m^2$ posta verticalmente e in cui è disposta una carica $Q = 8.9 \cdot 10^{-8}\ C$. Alla distanza $d = 10\ cm$ dalla prima lastra è posta parallelamente ad essa una lastra uguale collegata a terra. Calcolare:

1. **la d.d.p. tra le due armature.**
2. **a che distanza dal punto B la particella andrà ad urtare sulla seconda lastra.**
3. **l'energia cinetica della particella al momento dell'urto.**



1.

Le due lastre costituiscono un condensatore piano dal momento che la carica Q presente sulla prima lastra comporta una carica $-Q$ su quella posta a a terra. Avremo allora:

$$C = \epsilon_0 \cdot s/d = 8.85 \cdot 10^{-11} F; \qquad E = 10^4 V/m; \qquad V = Q/C = 10^3 V; \tag{26}$$

2.

Le equazioni del moto della particella sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

e quindi:

$$t^2 = 2 \cdot d/a = 2 \cdot d \cdot m/q \cdot E = 2 \cdot 10^{-2} s^2 \tag{27}$$

da cui:

$$y_C = 9.8 \cdot 10^{-2} m \tag{28}$$

3.

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} \tag{29}$$

La particella è inizialmente ferma quindi $E_{ci} = 0$. Rimane quindi:

$$E_{cf} = q \cdot V + m \cdot g \cdot y_C \tag{30}$$

N.9

Una sfera di raggio $R = 2\ cm$ ha una distribuzione di carica la cui densità è $\rho = \alpha \cdot r$ ($\alpha = 10^{-5} C/m^4$). Calcolare:

1. **il campo elettrostatico in un punto A distante $r_1 = 20\ cm$ dal centro e in un punto B distante $r_2 = 1\ cm$.**
2. **la d.d.p. tra i punti A e B.**
3. **supponiamo che una carica puntiforme $q = 10^{-6}\ C$ avente massa $m = 10\ gr$ parta dall'infinito ad una velocità $v = 0.01\ m/s$ diretta verso il centro della sfera, calcolare la distanza minima tra q e il centro della sfera.**

1. Dal teorema di Gauss:

$$E_A = 4 \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \alpha \cdot r \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2\ dr \tag{31}$$

da cui:
$$E_A = \frac{\alpha \cdot R^4}{\epsilon_0 \cdot 4 \cdot r_1^2} = 1.13V/m \tag{32}$$
Analogamente:
$$E_B = 4 \cdot \pi \cdot r_2^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_2} \alpha \cdot r^3 4 \cdot \pi dr \tag{33}$$
da cui:
$$E_B = \frac{\alpha \cdot r_2^2}{4 \cdot \epsilon_0} = 28.2V/m \tag{34}$$
2. Per il calcolo del potenziale tra A e B è necessario calcolare l'integrale di linea del campo E tra A e B:
$$V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^R \frac{\alpha \cdot R^4}{\epsilon_0 \cdot r^2} dr - \int_R^{r_2} \frac{\alpha \cdot r^2}{\epsilon_0 \cdot 4} dr = \frac{\alpha}{4 \cdot \epsilon_0} \{R^3 - \frac{R^4}{r_1} - \frac{r_2^3}{3} + \frac{R^3}{3}\} = 2.7V \tag{35}$$
3. Alla distanza minima tra la carica q e la sfera carica, si avrà un bilancio delle forze in gioco, quella cinetica della carica in movimento è quella repulsiva tra le due cariche.
$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = q \cdot V \tag{36}$$
Partendo dall'espressione del campo elettrico per un generico r:
$$E(r) = \frac{\alpha \cdot r \cdot 4 \cdot R^3}{12 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \tag{37}$$
il potenziale esterno della sfera è pari a:
$$V(r) = \frac{\alpha \cdot R^4}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot r} \tag{38}$$
Dall'equazione del bilancio delle forze si può quindi calcolare la distanza minima r_m:
$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = q \cdot \frac{\alpha \cdot R^4}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot r} \Rightarrow r_m = \frac{q \cdot \alpha R^4}{\epsilon_0 \cdot m \cdot v^2} \Rightarrow r_m = 9.04cm \tag{39}$$

N.10

In una regione dello spazio vi è un potenziale eletrrostatico $V = 10^7(x^2 + y^2)\ V$. Una particella tale che $q/m = 5 \cdot 10^6\ C/kg$ si trova per $t = 0$ in un punto A dell'asse delle x distante $x_i = 1\ cm$ dall'origine con una velocità iniziale $v_i = 10^5\ m/s$ diretta lungo l'asse delle y. Calcolare la traiettoria descritta dalla particella.

Sulla paricella agisce una forza elettrostatica $\vec{F}$ avente come componenti:

$$\begin{cases} F_x = -q\frac{\partial V}{\partial x} = -q \cdot V_0 \cdot 2 \cdot x \\ F_y = -q\frac{\partial V}{\partial y} = -q \cdot V_0 \cdot 2 \cdot y \end{cases}$$

Per cui le equazioni del moto sono:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2 \cdot q \cdot V_0}{m} x = 0; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2 \cdot q \cdot V_0}{m} y = 0; \tag{40}$$

che hanno come soluzione:

$$x(t) = x_0 \cdot cos(\omega t); \qquad y(t) = y_0 \cdot sen(\omega t); \qquad con \quad \omega^2 = \frac{2 \cdot q \cdot V_0}{m} \tag{41}$$

E' utile trovare l'espressione della velocità lungo la direzione y:

$$v_y(t) = y_0 \cdot \omega \cdot cos(\omega t) \tag{42}$$

Dalle condizioni iniziali si ricava:

$$x(0) = x_0 = x_i; \qquad v_y(0) = y_0 \cdot \omega \Rightarrow y_0 = \frac{v_i}{\omega} \tag{43}$$

Si ottiene quindi:

$$x(t) = x_0 \cdot cos(\omega t); \qquad y(t) = v_0/\omega \cdot sen(\omega t); \tag{44}$$

Andando ad eseguire i calcoli numerici si ottiene:

$$x_0 = 10^{-2}m; \qquad \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot V_0}{m}} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^8 \cdot 10^5} = 10^7 s^{-1}; \Rightarrow y_0 = \frac{10^5}{10^7} = 10^{-2}m \tag{45}$$

Poichè $x_0 = y_0$, si ha una traiettoria circolare uniforme di raggio x_0.

N.11

Due condensatori $C_1 = 1\ \mu F$ e $C_2 = 2\ \mu F$ sono separatamente portati alle tensioni $V_1 = 10\ V$ e $V_2 = 8\ V$. Ad un certo istante i morsetti positivi di ognuno vengono connessi tramite dei fili resistivi (il cui valore non interessa ai fini del problema). Determinare la tensione di C_1 e C_2 dopo il collegamento.

La carica totale presente sul circuito rimane costante dopo la chiusura dell'interruttore, cambiera' unicamente la distribuzione nei condensatori. La carica totale e' pari a:

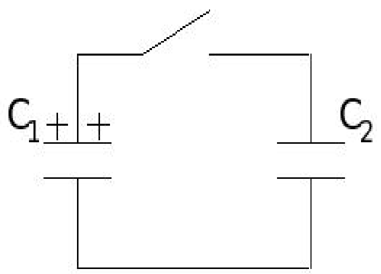
$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 \tag{46}$$

Dopo la chiusura dell'interruttore i due condensatori sono in parallelo, quindi:

$$V_{FIN} = \frac{Q_{TOT}}{C_{//}} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = 8.7V \tag{47}$$

N.12

Il condensatore $C_1 = 0.5\ \mu F$ ha, all'istante t_0, una carica $Q_1 = 1\mu\ C$. All'istante t_1 l'interruttore in figura viene chiuso, e la carica presente su C_1 si ridistribuisce sui due condensatori. Calcolare il valore della carica sui due condensatori al nuovo equilibrio e l'energia dissipata nel trasferimento.



Dopo la chiusura dell'interruttore i due condensatori si trovano in parallelo, quindi allo stesso potenziale elettrico:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1 - Q_1'}{C_2} \tag{48}$$

da cui:

$$Q_1' = Q_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0.25\mu C; \qquad Q_2' = Q_1 - Q_1' = 0.75\mu C; \tag{49}$$

L'energia iniziale del sistema e' pari a:

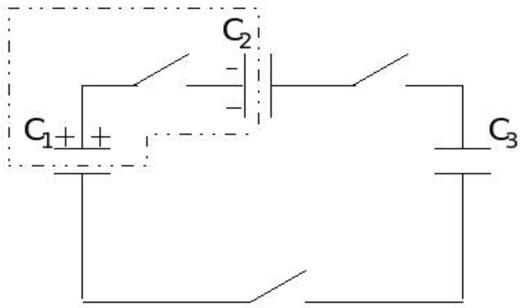
$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = 10^{-3} J \tag{50}$$

mentre quella finale:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1'^2}{C_1} + \frac{Q_2'^2}{C_2}\right) = 0.437 mJ \tag{51}$$

N.13

I tre condensatori (di uguale capacita') di figura sono inizialmente carichi alle tensioni $V_1 = 30\ V$, $V_1 = 60\ V$ e $V_1 = 1200\ V$. Calcolare le tensioni all'equilibrio dopo la chiusura degli interruttori.



Il ramo del circuito evidenziato in figura e' isolato dalle restanti parti, quindi la carica si mantiene costante alla chiusura dell'interruttore:

$$C \cdot V_1 - C \cdot V_2 = C \cdot V_1' - C \cdot V_2' \Rightarrow V_1 - V_2 = V_1' - V_2' \tag{52}$$

Analogamente:

$$V_2 - V_3 = V_2' - V_3' \tag{53}$$

La terza condizione nono puo' essere ricavata dallo stesso ragionamento tra i condensatori C_1 e C_3, si avrebbero tre equazioni non linearmente indipendenti. Dalla proprieta' sulla circuitazionoe del campo elettrico possiamo scrivere:

$$V_1' + V_2' + V_3' = 0 \tag{54}$$

Risolvendo il sistema a tre equazioni si ottiene:

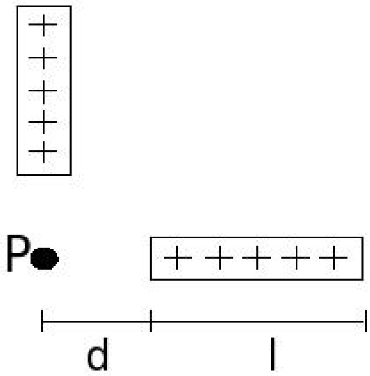
$$V_1' = -40\ V; \qquad V_2' = -10\ V \qquad V_3' = 50\ V \tag{55}$$

N.14

Due barrette sottili di materiale isolante, lunghe $l = 1\ m$, sono disposte perpendicolarmente tra di loro. Detta $d = 0.1\ m$ la distanza del punto P dalla estremita' delle due barrette. Su ciascuna barretta e' distribuita uniformemente una carica $q = 5\ nC$. Determinare l'intensita' del campo elettrico in P.

Il campo generato dalla prima barretta e' pari a:

$$E_x = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_d^{d+l} \frac{\lambda \cdot dx}{x^2} = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot l} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right) = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d(d+l)} \tag{56}$$



dove λ e' la densita' di carica lineare presente sulla barretta. Per analogia, il campo dovuto alla seconda barretta:

$$E_y = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d(d+l)} \tag{57}$$

Quindi l'intensita' del campo e' pari a:

$$|E_y| = q \cdot \sqrt{2} 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d(d+l) = 578V/m \tag{58}$$

N.15

Una goccia sferica di acqua su cui e' presente una carica di 32 pC ha, alla superficie, un potenziale di 512 V.

- **Qual e' il raggio della goccia?**
- **Se due gocce identiche (stessa carica e stesso raggio) coalescono a formare un'unica goccia, quale sara' il potenziale della goccia formata?**

Ricordando la relazione tra carica e potenziale, nonche' l'espressione della capacita' di un condensatore sferico di raggio R:

$$C = \frac{Q}{V}; \qquad C = 4 \cdot \pi\epsilon_0 \cdot R \tag{59}$$

da cui:

$$R = \frac{Q}{4 \cdot \pi\epsilon_0 \cdot V} = 0.54mm \tag{60}$$

Dopo la coalescenza si avra':

$$Q \to 2 \cdot Q; \qquad R \to^3 \sqrt{2 \cdot R} \tag{61}$$

Quindi:

$$V' = \frac{2}{1.26} \cdot V \backsimeq 795V \tag{62}$$

N.16

Il campo elettrostatico della Terra vale circa $E_t = 100\ V/m$, diretto verso il centro della Terra che ha un raggio $R_t = 6350\ km$ ed e' globalmente neutra. Fino ad una quota $h = 10\ km$ vi e' una densita' volumetrica di carica approssimativamente distribuita uniformemente, che deve essere uguale e contraria alla carica superficiale. Determinare:

1. **La carica totale sulla superficie della Terra**
2. **la differenza di potenziale tra la quota h e la superficie**
3. **la capacita' equivalente della Terra.**

1. Dal teorema di Coulomb:

$$\sigma = -E_t \cdot \epsilon_0 = -8.86 \cdot 10^{-10} C/m^2 \tag{63}$$

quindi la carica sulla superficie terrestre e' pari a:

$$Q_t = \sigma \cdot 4 \cdot \pi \cdot R_t^2 = -4.6 \cdot 10^5 C \tag{64}$$

2. Lo spessore h e' trascurabile rispetto al raggio R_t, per cui e' possibile l'approssimazione della densita' di carica nell'atmosfera vale:

$$\rho_t \approx \frac{-Q_t}{4 \cdot \pi \cdot R_t^2 \cdot h} \tag{65}$$

Considerando una sfera concentrica ad una quota generica z compresa tra 0 ed h, l'applicazione del teorema di Gauss comporta (ricordando che il campo e' diretto verso la superficie, quindi entrante nella sfera considerata):

$$-E_z 4 \cdot \pi \cdot (R_t + z)^2 = \frac{Q_t}{\epsilon_0} + \frac{\rho_t \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot z}{\epsilon_0} \tag{66}$$

Trascurando z rispetto ad R_t e sostituendo l'espressione della densita' di carica:

$$-E_z 4 \cdot \pi \cdot R_t^2 = \frac{Q_t}{\epsilon_0} - \frac{Q_t \cdot z}{\epsilon_0} \tag{67}$$

Quindi:

$$E_z = \frac{Q_t}{4 \cdot \pi \cdot R_t^2 \cdot \epsilon_0} \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \tag{68}$$

La differenza di potenziale tra la quota h e la superficie sara' quindi:

$$\delta V = \int_h^0 E_z dz = 500kV \tag{69}$$

3. La capacita' della Terra a quindi valore:

$$C = \frac{Q_t}{\delta V} = 0.9F \tag{70}$$

N.17

In una sfera di centro O_1, uniformemente carica con densita' ρ, e' praticato un foro sferico di centro O_2 all'interno del quale c'e' il vuoto. Sapendo che R_1 ed R_2 sono rispettivamente i raggi della sfera e del foro, calcolare il campo elettrico in un ponto P interno al foro. Il campo elettrico in P e' pari a:

$$\vec{E} = \vec{E_1} = +\vec{E_2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left\{ \frac{q_1 \cdot \vec{r_1}}{r_1^3} - \frac{q_2 \cdot \vec{r_2}}{r_2^3} \right\} \tag{71}$$

essendo:

$$q_1 = 4/3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r_1^3; \qquad q_2 = -4/3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r_2^3; \tag{72}$$

cariche puntiformi poste al centro della sfera e del foro. Si ha quindi:

$$\vec{E} = \frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi}{12 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left\{ \frac{r_1^3}{r_1^2} - \frac{r_2^3}{r_2^2} \right\} = \frac{\rho \cdot R}{3 \cdot \epsilon_0} \tag{73}$$

ovvero il campo all'interno della cavita' e' uniforme e dipende solo dalla distanza R tra il centro della sfera e il centro del foro.
Risultato analogo si ottiene col teorema di Gauss:

$$4 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot E_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r_1^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho \cdot r_1}{3 \cdot \epsilon_0} \tag{74}$$

$$4 \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot E_2 = -\frac{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r_2^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = -\frac{\rho \cdot r_2}{3 \cdot \epsilon_0} \tag{75}$$

da cui:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\rho \cdot R}{3 \cdot \epsilon_0} \tag{76}$$