Esercizi. Assegnazione 6 (4/5/07)

Es 18 (Spazi di Hilbert complessi). Uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto scalare complesso[1] $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che sia completo rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

(i) Dimostrare che i seguenti spazi sono spazi di Hilbert complessi:

• ℓ^2 lo spazio delle successioni $\{c_n \in \mathbb{C} : \ n \in \mathbb{Z}\}$ a quadratato sommabile ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$) dotato del prodotto scalare $\langle c, d \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$;

• $L^2(\Omega)$ lo spazio delle classi di equivalenza (modulo insiemi di misura di Lebesgue nulli) di funzioni da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, insieme misurabile secondo Lebesgue, a valori complessi ed a quadrato sommabile ($\int_\Omega |f|^2 dx < \infty$ dove dx denota la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$).

(ii) Analogamente al caso reale ed introducendo le corrispondenti definizioni necessarie, si dimostri che ogni spazio di Hilbert (complesso) separabile ammette una base di Hilbert numerabile.

Es 19 Sia $f \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ e si diano le seguenti definizioni

$$
\begin{aligned}
&\hat{f}_n := \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ , \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z} \ ; \\
&S_N : f \to (S_N f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n \, e^{inx} \ , \qquad \forall N \geq 0 \ ; \\
&C_N : f \to (C_N f)(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} (S_k f)(x) \ , \qquad \forall N \geq 0 \ ; \\
&K_N(x) := \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{N+1}{2} x}{2\pi (N+1) \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \ , \qquad \forall N \geq 0 \ .
\end{aligned}
$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni[2].

(i) $(S_N f)(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+t) \ \frac{\operatorname{sen}\,(N+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt.$

---

[1] Ossia soddisfa

(a) $\langle x, x \rangle > 0$, $\forall x \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$;

(b) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$, $\qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$;

(c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

[2] Come d'uso comune, denotiamo ancora con $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'estensione 2π-periodica di $f \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ cioè $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_{2\pi n} f$ dove $(\tau_y g)(x) = g(x+y)$ è l'operatore di traslazione.

(ii) $(C_N f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t) K_N(t) dt$.

(iii) $\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = 1$ e per ogni $0 < \delta < 2\pi$, $K_N \to 0$ uniformemente su $[\delta, 2\pi - \delta]$.

(iv) Se $f \in L^\infty([0,2\pi])$ ed è continua in x_0 allora

$$\lim_{N\to\infty} (C_N f)(x_0) = f(x_0) \ . \qquad \text{(Cesàro)}$$

(v) Se $f \in C_{\rm per}([0,2\pi])$ (cioè $f \in C(\mathbb{R})$ e $f(x+2\pi) = f(x)$) allora[3]

$$\lim_{N\to\infty} \|C_N f - f\|_{C[0,2\pi]} = 0 \ .$$

(vi) Se $f \in L^2([0,2\pi])$ allora[4]

$$\|f - S_N f\|_2 \le \|f - C_N f\|_2 \ .$$

(vii) Se $f \in C^1_{\rm per}([0,2\pi])$ (cioè $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(x+2\pi) = f(x)$) allora

$$\widehat{f'_n} = in\hat{f}_n \ , \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 |\hat{f}_n|^2 < \infty \ , \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n| < \infty \ .$$

(viii) Se $f \in C^1_{\rm per}([0,2\pi])$, allora

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_{C[0,2\pi]} = 0 \ .$$

(ix) Sia ℓ^2 lo spazio di Hilbert delle successioni $\{c_n \in \mathbb{C} : \ n \in \mathbb{Z}\}$ a quadratato sommabile ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$) dotato del prodotto scalare $\langle c, d\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$. Si denoti con $\mathcal{F}$ la mappa $f \in L^2([0,2\pi]) \to \{\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si dimostri che $\mathcal{F}$ è una isometria (suriettiva) di spazi di Hilbert (che conserva il prodotto scalare).

(x) Si dimostri che $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base di Hilbert per $L^2([0,2\pi])$.

---

[3] $\|\cdot\|_{C[0,2\pi]}$ denota la norma del massimo.

[4] $\|\cdot\|_2$ denota la norma L^2.